ஆயத்தொலை வடிவ கணிதம்

(ANALYTICAL GEOMETRY)

ஆசிரியர்

டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழ்நாடு-அரசாங்கம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 125

ஆயத்தொலை வடிவ கணிதம்

(ANALYTICAL GEOMETRY)

ஆசிரியர்
டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை,
கணிதப் பேராசிரியர்,
அழகப்பா தொழில்நுட்பக் கல்லூரி,
சென்னை.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—April, 1966
Second Edition—April, 1971
Reprint—September, 1977
Number of Copies—2,000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 125

ANALYTICAL GEOMETRY

T. K. MANICAVACHAGOM PILLAY

Price Rs. 6-85

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by
MUTHUKUMARAN PRESS,
14-A, Kuppier Street,
Madras-1.

பதிப்புரை

ஆயத்தொலை வடிவ கணிதம் என்ற இந் நூல், தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் சார்பில் வெளியான 125ஆவது வெளியீடாகும். இதன் முந்தைய பதிப்புப் படிகள் அனைத்தும் விற்பனையாகி விட்டன. ஆதலின், இப்பொழுது இந் நூல் மீண்டும் வெளி வருகின்றது. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி - சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

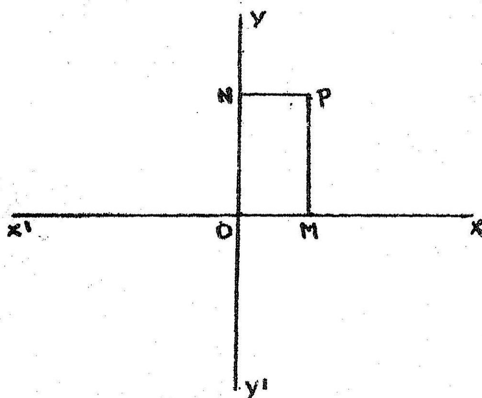
1. புள்ளிகளும் இயங்குவரைகளும்

(Points and Loci)

1. ஆயத்தொலைகள் (Co-ordinates)

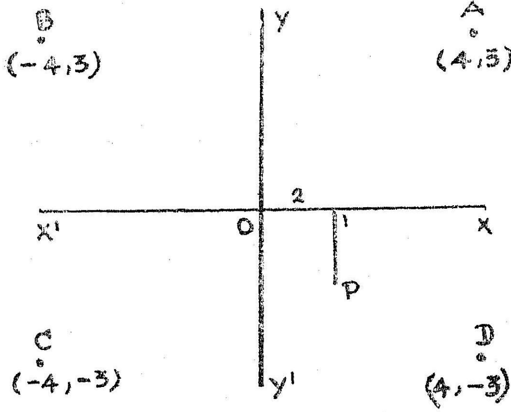
X'OX, Y'OY என்றவை நேர்குத்தான இரு கோடுகள் எனவும், முதற்கோடு இடமிருந்து வலமும், இரண்டாவது கோடு கீழிருந்து மேலும் வரையப்பட்ட கோடுகள் எனவும் கொள்வோம். X'OX, Y'OY, நிரலே x ஆயம் (x-Axis), y ஆயம் (y-Axis) எனவும், அவை வெட்டும் புள்ளி O ஆதி (Origin) எனவும் பெயர் பெறும்.

இப் படத்தின்கண் P புள்ளியின் நிலையைக் காண NP, MP தொலைகள் தெரிதல்வேண்டும். x ஆயத்திற்கு ஒருபோகான (Parallel) P-ன் x ஆயத்தொலை NP, (x Co-ordinate) என்றும், y ஆயத்திற்கு ஒருபோகான MP, P-ன் y ஆயத்தொலை (y Co-ordinate) என்றும், அவற்றை x, y என்றும், P-ஐ (x, y) என்றும் கூறல் மரபு.



படம் - 1

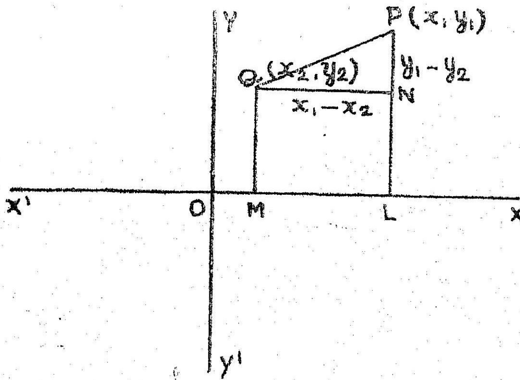
x, y என்பவற்றிற்கு மிகை மதிப்பும், குறைமதிப்பும் உண்டு. x-ன் குறைமதிப்புகள் OX' வழியாகவும், y-ன் குறைமதிப்புகள் OX'-ன் ஒருபோகு கோட்டு வழியாகவும் அளக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, P (2, — 1) புள்ளியின் நிலையைக் காண OX வழியாகத் தொலை 2ஐ அளந்தபின் OY'-க்கு ஒருபோகு கோட்டு வழியாக, தொலை 1ஐ அளக்கவேண்டும். ஆதி (0, 0) ஆகும். இரண்டாம் படத்தில் A, B, C, D புள்ளிகள் முறையே (4, 3), (—4, 3), (—4, —3), (4, —3) ஆகும்.



படம் - 2

2. இரு புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட தொலை

P, Q புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்று கொள்வோம்.



படம் - 3

PL, QM, QN இவற்றைப் படத்திற் காண்பதுபோல, ஆயங்களுக்கு ஒருபோகாக வரையின்,

$$OL = x_1,\ LP = y_1$$

$$OM = x_2,\ MQ = y_2$$

ஆகவே, $QN = ML = x_1 - x_2$

QNP முக்கோணத்தில் QNP = 90° ஆகையால்

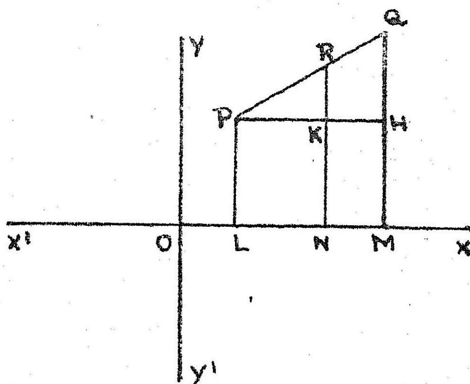
$$PQ^2 = QN^2 + NP^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
$$\therefore PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ஆதியிலிருந்து $P(x_1, y_1)$-ன் தொலை $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

குறிப்பு: ஆயத்தொலை வடிவ கணிதத்தில் (Co-ordinate Geometry)வரும் வாய்பாடுகள் எல்லாம் பொதுப்படையாதலின், ஆயத்தொலைகளுக்கு உரிய குறிகளை எடுப்பின், நான்கு கால் வட்டங்களில் இருக்கும் புள்ளிகள் அனைத்திற்கும் இவ் வாய்பாடு கள் பொருந்தும்.

3. (x_1, y_1) (x_2, y_2) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை $m : n$ தகவுப்படி பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

P, Q புள்ளிகளை நிரலே (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றும், PQஐ $m : n$ தகவுப்படி பிரிக்கும் புள்ளியை $R(x, y)$ என்றும் கொள்வோம். அப்பொழுது $\frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$. PL, RN, QM, PKH இவற்றைப் படத்திற் காண்பது போல் ஆயங்களுக்கு ஒருபோகாக வரையின்,



படம்-4

$$KH = x_2 - x, \qquad PK = x - x_1$$
$$KR = y - y_1, \qquad HQ = y_2 - y_1$$

முக்கோணம் PHQ-ல் KR, HQ ஒருபோகு கோடுகளாகையால்

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{PK}{KH}$$
$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

(அ-து) $n(x - x_1) = m(x_2 - x)$

$$\therefore \quad x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

இதுபோன்றே $$y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

கிளைத்தேற்றம் : (x_1, y_1) (x_2, y_2) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

4. PQ-ன் புறத்து அக் கோட்டில் R இருந்தால் PQஐ R, PR : RQ தகவுப்படி பிரிக்கும். PR, RQ வேறுபட்ட குறியுடையன ஆதலின் $\frac{PR}{RQ}$ ஒரு குறைதகவு ஆகும்.

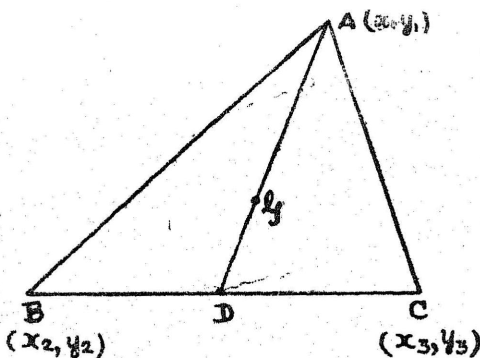
PQஐ R, $m : n$ தகவுப்படி வெளியில் பிரித்தால்

$$\frac{PR}{RQ} = -\frac{m}{n}$$

P Q R

ஆகவே, R-ன் ஆயத்தொலைகள் $\frac{nx_1 - mx_2}{n-m}$, $\frac{ny_1 - my_2}{n-m}$.

(5) முக்கோண உச்சிகளின் ஆயத்தொலைகள் தெரிந்தால் அம் முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் (Centroid) காணலாம்.



படம் - 5

முக்கோணத்தின் உச்சிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்றும், AD, நடுக்கோடு (Median) என்றும், G, நடுக்கோட்டு மையம் என்றும் கொள்வோம்.

D-ன் ஆயத்தொலைகள் $\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}$. ADஐ G, 2 : 1 தகவுப்படி பிரிக்கும். ஆகவே, அதன் ஆயத்தொலைகள்

$$x = \frac{1 . x_1 + 2. \frac{x_2 + x_3}{2}}{1 + 2}, y = \frac{1 . y_1 + 2. \frac{y_2 + y_3}{2}}{1 + 2}$$

$$\therefore x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

மாதிரி 1 :

(— 3, —4), (2, 6), (— 6, 10) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமென நிறுவுக.

A (—3, —4), B (2, 6), C (—6, 10) எனக் கொண்டால்,

$AB^2 = 5^2 + 10^2 = 125$

$BC^2 = 8^2 + 4^2 = 80$

$CA^2 = 3^2 + 14^2 = 205$

$\therefore \quad CA^2 = BC^2 + AB^2$

ஆகவே, முக்கோணம் ABC-ல் $\angle B = 90°$.

மாதிரி 2 :

(—7, —3), (5, 10), (15, 8), (3, —5) புள்ளிகள் ஒருபோகு நாற்சிறையின் (Parallelogram) முனைகள் என நிறுவுக.

இப் புள்ளிகளை A, B, C, D எனக் கொண்டால் மூலைவரை (Diagonal) AC-ன் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{-7 + 15}{2}, \frac{-3 + 8}{2}\right)$

அஃதாவது (4, 2·5)

மூலைவரை B D-ன் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{5 + 3}{2}, \frac{10 - 5}{2}\right)$

(அ-து.) (4, 2·5)

ஆகவே, ABCD நாற்சிறையில் மூலைவரைகள் AC, BD ஒன்று மற்றொன்றைச் சமமாகப் பிரிக்கும்.

மாதிரி 3 :

(1, 3), (2, 7) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை (—2, —9) எத் தகவுப்படி பிரிக்கும்? அத் தகவை $m : n$ என்று கொண்டால்,

$$-2 = \frac{n + 2m}{m + n}$$

(அ-து.) $-2m - 2n = n + 2m$

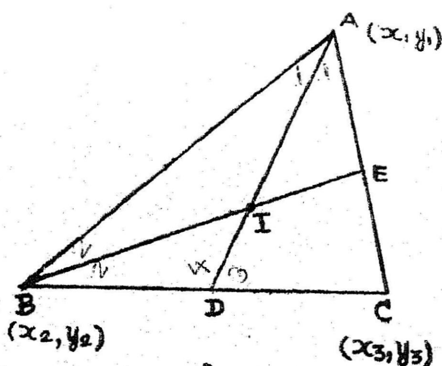
(அ-து.) $4m = -3n$

$$\therefore \quad \frac{m}{n} = -\frac{3}{4}.$$

மாதிரி 4 :

ஒரு முக்கோணத்தின் உள் மையத்தை (Incentre) முக்கோண உச்சிகளின் ஆயத்தொலைகளால் காண்க.

முக்கோணம் ABC-ல் உச்சிகளின் ஆயத்தொலைகள் நிரலே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்றும், முக்கோணப் பக்கங்கள் a, b, c என்றும் கொள்வோம். AD, BE நிரலே $\angle A$, $\angle B$, இவற்றின் சம வெட்டிகள் (Bisectors).



படம் - 6

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}.$$

$\therefore$ D-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$\frac{bx_2 + cx_3}{b + c}, \quad \frac{by_2 + cy_3}{b + c}$$

$$\therefore \frac{DC}{BD}+1=\frac{b}{c}+1$$

$$\frac{BC}{BD}=\frac{b+c}{c} \quad \therefore \; BD=\frac{ac}{b+c}.$$

மேலும் $\frac{DI}{IA}=\frac{BD}{AB}$,

$$\therefore \frac{DI}{IA}=\frac{ac}{(b+c)c}=\frac{a}{b+c},$$

$\therefore$ I-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$\frac{(b+c)\frac{bx_2+cx_3}{b+c}+ax_1}{a+b+c}, \quad \frac{(b+c)\frac{by_2+cy_3}{b+c}+ay_1}{a+b+c}$$

அதாவது $\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$, $\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}$.

பயிற்சிகள் 1

1. பின்வரும் ஒவ்வோர் இணைப் புள்ளிக்கும் (Pair of Points) இடைப்பட்ட தொலைவினைக் காண்க.

(1) (6, 8), (3, 4)

(2) (3,—4), (2, 0)

(3) (2,—3), (—4, —6)

(4) $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$

(5) $(a \cos \theta, a \sin \theta)$, $(a \cos \phi, a \sin \phi)$

(6) $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$, $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$

2. (2,—2), (—1, 2), (3, 1) புள்ளிகள் இருசமச்சிறை (Isosceles) முக்கோணமொன்றின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

3. (0, 1) (1, 2), (2, 3) புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணம் எத்தன்மையது ?

4. (4, 3) புள்ளியை மையமாகக்கொண்ட வட்டத்தில் (9, 3), (7, —1), (1, —1) புள்ளிகள் உள என நிறுவுக. அவ் வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

5 (0, —1), (2, 1), (0, 3), (—2, 1) புள்ளிகளால் அமைந்த படம் சதுரமாகுமென நிறுவுக.

6. 3, —5), (—5, 9), (7, 10), (—9, —6) புள்ளிகள் ஒரு போகு நாற்சிறையின் முனைகளென நிறுவுக.

7. (2, —3), (—6, —7), (—8, —3) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணமென நிறுவுக.

8. (2, 2), (—2, —2), $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ புள்ளிகள் ஒரு சம பக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

9. (3, 7), (6, 5), (15, —1) புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் உள என நிறுவுக.

10. (2, 3), (6, 9) புள்ளிகளைச் சேர்க்குங் கோடு ஆதிவழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

11. (—2, 2), (—8, —4), (—5, —7), (1, —1) புள்ளிகள் ஒரு நீள்சதுர முனைகள் என நிறுவுக.

12. (1, 1), (2, —1), (3, 2) வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ என நிறுவுக.

13. (1) (2, 3), (— 4, 7), (5, 2),
(2) (1, 2), (0, 3), (—1, —2),
(3) (1, 1), (2, 3), (—2, 2), புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் எவை ?

14. (8,5),(—7,—5),(—5,5) புள்ளிகள் ஒருபோகு நாற்சிறை ஒன்றின் மூன்று முனைகளாயின், (—7, —5), புள்ளிக்கு எதிரிலுள்ள நான்காவது முனையின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

15. (3, 12,) (6, —2) புள்ளிகள் ஒருபோகு நாற்சிறை ஒன்றின் இரு முனைகளாகும். இந் நாற்சிறையின் மூலைவரைகள் (—2, 2) புள்ளியில் வெட்டின், எஞ்சிய இரு முனைகளின் ஆயத் தொலைகள் யாவை ?

16. (1, 2), (0, 3), (—1, —2) புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத் தின் உச்சிகள் எனின், அம் முக்கோணத்து நடுக்கோடுகளின் நீளம் என்ன ?

17. (4, 6), (—8, 10) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டினை 2 : 3 தகவுப்படி வெளியே பிரிக்கும் புள்ளி யாது? அக் கோட்டினை 3 : 2 தகவுப்படி வெளியே பிரிக்கும் புள்ளி யாது?

18. (1, 2), (5, 4) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டினையும், (—5, —1), (3, 3) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டினையும் (7, 5) புள்ளி ஒரே தகவுப்படி பிரிக்கும் என நிறுவுக.

19. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ ஒரு நாற்சிறையின் உச்சிகளாயின் அதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஒருபோகு நாற்சிறையின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

20 முக்கோணம் ABC-ல் BC-ன் நடுப்புள்ளி D எனின் $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DC^2)$ என நிறுவுக.

21. முக்கோணம் ABC-ல் நடுக்கோட்டு மையம் G எனின், $3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2$ என நிறுவுக.

22. பின்வரும் பயிற்சிகளில் A, B, C புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் இருக்குமெனவும் C, AB ஐப் பிரிக்கும் தகவு எது எனவும் காண்க :

A (2, 2) B (14, —4), C (—10, 8).
A (4, 18) B (—6, 24), C (34, 0).
A (1, 4) B (2, 1) C (4, —5).

23. (—3, 4), (4, —3) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை நான்கு பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

24. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் (6, —2), (—4, 6). நடுக்கோட்டு மையம் ஆதி எனின், மூன்றாவது முனையின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

25. (1, —1), (—1, 1), (x, y) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணம் சமபக்கமாயின் x, y-யின் மதிப்பினைக் காண்க.

6. முக்கோணத்தின் பரப்பு

ABC முக்கோண A, B, C உச்சிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ என்று கொள்வோம்.

OX-க்கு நேர்குத்தாக AL, BM, CNஐ வரைக.

ABC-ன் பரப்பு = ALNC — ALMB — BMNC.

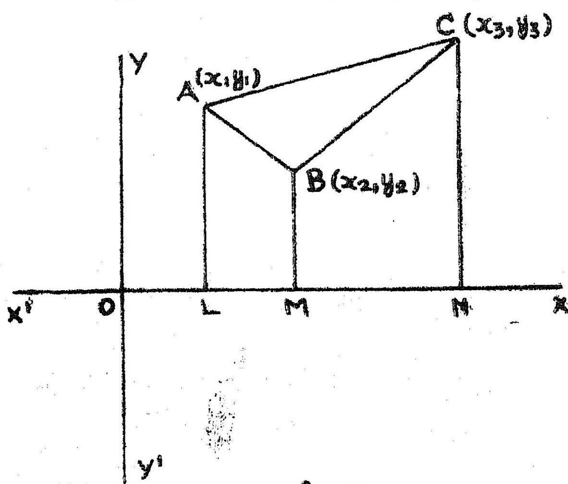
ALNC இருசரிவு நாற்சிறையின்

$$\text{(Trapezium) பரப்பு} = \tfrac{1}{2}(LA + NC).\,LN$$
$$= \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

இதுபோன்றே $ALMB = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$

$$BMNC = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

∴ ABC-ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)\}$



படம் - 7

இதனைச் சுருக்கின்

$$\Delta = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3)$$
$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

குறிப்பு : ஒரு படத்தைச் சுற்றிவரும்பொழுது அப் படம் இடமிருப்பின் பரப்பு மிகையாகவும், வலமிருப்பின் பரப்புக் குறையாகவும் கருதப்படுவது வழக்கம். இம் முறைப்படி முக்கோணம் ABC-ன் பரப்பு மிகையாகவும், முக்கோணம் ACB-ன் பரப்பு குறையாகவும் கொள்ளப்படும்.

$$\triangle ABC = - \triangle ACB.$$

கிளைத்தேற்றம் : (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு சுன்னமாயின், இப் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலிருக்கும். இதனைப் பயன்படுத்தி இரண்டிறந்த புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் உண்டோ என்பதை அறியலாம். எடுத்துக்காட்டாக, (1, 4) (3, −2), (−3, 16) புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

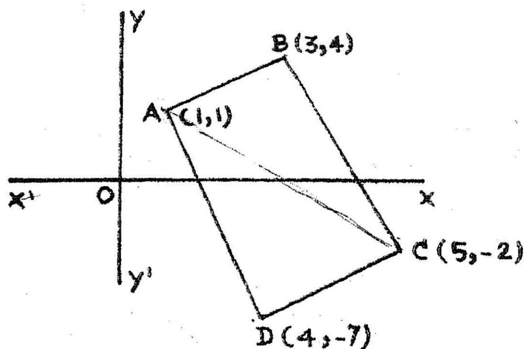
$$= \frac{1}{2}\{1(-2-16) + 3(16-4) - 3(4+2)\} = 0$$

ஆகவே, இப் புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் உள்ளன.

மாதிரி 5 :

(1, 1), (3, 4), (5, —2), (4, —7) புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்சிறையின் பரப்பு என்ன ?

$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\ \{1(-7+2)+4(-2-1)+5(1+7)\}$$
$$= \frac{1}{2}(-5-12+40)$$
$$= \frac{23}{2}.$$



படம் - 8

$\triangle$ ACB

$$= \frac{1}{2}\ \{1(-2-4)+5(4-1)+3(1+2)\}$$
$$= \frac{1}{2}(-6+15+9)$$
$$= 9$$

நாற்சிறை ADCB-ன் பரப்பு $= \frac{23}{2} + 9 = 20\frac{1}{2}$.

மாதிரி 6 :

$(0, b)$, $(a, 0)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் (x, y) புள்ளி இருப்பதற்குரிய நிலை என்ன ?

அந் நிலையில் $(0, b)$, $(a, 0)$, (x, y) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு சுன்னமாகும்.

$$\therefore \frac{1}{2}\ \{0(0-y)+a(y-b)+x(b-0)\} = 0$$

(அ-து) $ay - ab + xb = 0.$

(அ-து) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

பயிற்சிகள் 2

1. பின்வரும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணங்களின் பரப்பினைக் காண்க :

(1) $(2, 3), (3, -1), (-4, 2)$.

(2) $(-2, 4)$ $(10, -2), (-2, -8)$.

(3) $(a, b+c), (c, b-c), (-a, c)$.

2. பின்வரும் புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்சிறைகளின் பரப்பினைக் காண்க :

(1) $(-1, 6), (-3, -9), (5, -8), (3, 9)$.

(2) $(1, 2), (2, -3), (-2, 4), (-1, -5)$.

(3) $(6, 2), (10, 16), (-12, 6), (-4, 18)$.

3. பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள் என நிறுவுக :

(1) $(-1, 6)$ $(-10, 12), (-16, 16)$.

(2) $(1, -1), (7, -4), (-5, 2)$.

(3) $(1, 4), (9, -2), (5, 1)$.

4. $(0, 6), (-15, 1), (-3, 11)$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ABC முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் G எனின், GBC, GCA, GAB முக்கோணங்களின் பரப்பு, முக்கோணத்தில் மூன்றில் ஒன்று என்று நிறுவுக.

5. $(2, -3), (1, 4)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் (x, y) புள்ளி இருப்பின் x, y இவற்றின் தொடர்பு என்ன ?

6. $(1, 2), (2, 3), (x, 4)$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 40 சதுர அலகுகள் (Square Units) எனின் x-ன் மதிப்பு என்ன ?

7. இயங்குவரைகளும் அவற்றின் சமன்பாடுகளும் (Loci and their Equations)

முந்தின பகுதிகளில் புள்ளிகளின் தனித்தனி நிலையை எவ் விதம் சுட்டுவது என்பதுபற்றிப் பார்த்தோம். இப் பகுதியில் பல புள்ளிகளின் நிலையை ஒன்ருய்க் குறிப்பிடும் விதத்தைப் பார்ப் போம். விதி யொன்றிற் கிணங்கியுள்ள புள்ளிகள் அனைத்தையும் ஒன்றுசேர்த்துக் குறிப்பிட இயலும்; தாறுமாருக உள்ள புள்ளி கள் ஒன்றுசேர்த்துக் குறிப்பிட வாரா. ஒரே கோட்டிலுள்ள

புள்ளிகள் அனைத்தையும் ஒரு சமன்பாட்டால் குறிப்பிடமுடியும். எடுத்துக்காட்டாக,

(1) (1, 2), (3, 4) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டில் உள்ள புள்ளியொன்றின் ஆயத்தொலைகள் x, y எனின் அப் புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்புச் சுன்னமாகும்.

ஆகவே, $\frac{1}{2}\{1(4-y)+3(y-2)+x(2-4)\}=0$
(அ-து) $y-x=1$.

அக் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளனைத்தின் x, y ஆயத் தொலைகள் இச் சமன்பாட்டில் பொருந்தும். ஆதலின், இது அக் கோட்டினையே குறிக்கும்.

(2) (2, 3) புள்ளியிலிருந்து (x, y)-ன் தொலை 4 ஆயின் $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$.
(அ-து) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$.

இச் சமன்பாடு (2,3) புள்ளியை மையமாகவும் 4ஐ ஆரையாகவு முடைய வட்டத்தைக் குறிக்கும். ஆகவே, இது இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு எனக் கூறப்படும்.

(3) (3, 4), (2, 1) புள்ளிகளுக்குச் சம தொலையிலிருக்கும் புள்ளிகளில் ஒன்று (x, y) ஆயின்

$$(x-3)^2+(y-4)^2=(x-2)^2+(y-1)^2.$$
(அ-து) $x+3y=10$.

முந்திய பயிற்சிகளில், ஒரே வடிவ கணிதப்பண்புடைய புள்ளியில் இயக்கம் ஒரு சமன்பாட்டைத் தரும் என்றும், அச்சமன்பாடு புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு ஆகும் என்றும் அறிந்தோம். பொதுப்படையாகப் பல புள்ளிகள் ஒரு விதிக்கிணங்க இருப்பின் அவை ஓர் இயங்குவரையில் அமையும். இப் புள்ளிகள் அனைத்துக்கும் பொருந்தியும், ஆனால் மற்றைப் புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தமின்றியும் காணப்படும் சமன்பாடு இயங்குவரையின் சமன்பாடு எனப்படும்.

ஒரு வளைவரையின் (Curve) நன்கறிந்த பண்பு ஒன்றினால் அதன் சமன்பாடு கண்டு, பின்னர் அதன்வாயிலாக வளைவரையின் பல பண்புகளைக் காணுவது இக் கணிதத்தின் சிறந்த நோக்கமாகும்.

8. பின்வருவன கருதத்தகுவன :

1. $x =$ நிலையெண். இது y ஆயத்தோடு ஒருபோகான கோட்டின் சமன்பாடு.

y ஆயத்தின் சமன்பாடு $x = 0$

2. $y =$ நிலையெண். இது x ஆயத்தோடு ஒருபோகான கோட்டின் சமன்பாடு.

x ஆயத்தின் சமன்பாடு $y = 0$.

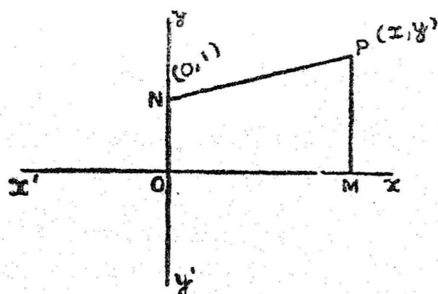
3. XOY கோணத்தின் சமவெட்டி $x = y$.

4. XOY′ கோணத்தின் சமவெட்டி $x = -y$.

மாதிரி 7 :

(0, 1) புள்ளியிலிருந்து உள்ள தொலையின் இரு மடங்கு x ஆயத்திலிருந்துள்ள தொலையாகக் கொண்டு ஒரு புள்ளி இயங்குமெனின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரைச் சமன்பாடு என்ன ?

இவ் விதிக்கிணங்கிய புள்ளிகளில் ஒன்று P (x, y) என்றும், N (0, 1) என்றும் கொள்வோம். x ஆயத்துக்கு நேர்குத்தாக PMஐ வரைக.



படம் 9

$\therefore \quad PN = 2PM.$

(அ-து) $PN^2 = 4PM^2$.

(அ-து) $x^2 + (y - 1)^2 = 4y^2$.

(அ-து) $x^2 - 3y^2 - 2y + 1 = 0$.

மாதிரி 8 :

(2, —3), (3, 4) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நடுக் குத்துக் கோட்டின் (Perpendicular Bisector) சமன்பாட்டினைக் காண்க.

நடுக்குத்துக் கோட்டில் இருக்கும் புள்ளி ஒவ்வொன்றும் A, B-க்குச் சமதொலைவில் இருக்கும். நடுக்குத்துக் கோட்டில் இருக்கும் புள்ளிகளில் ஒன்று P (x, y) என்று வைத்துக்கொள் வோம்.

$\therefore \quad PA = PB.$

(அ-து) $PA^2 = PB^2.$

$\therefore \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2.$

(அ-து) $x - y = 6.$

பயிற்சிகள் 3

1. (3, 4), (5, —2) புள்ளிகளுக்குச் சமதொலைவில் இருக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரை $x - 3y = 1$ என்று நிறுவுக.

2. (3, 4) புள்ளியிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலை 5 ஆயின், அதன் இயங்குவரை $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ என நிறுவுக.

3. (2, 1), (1, 2) புள்ளியிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலை யிடையுள்ள தகவு 2 : 1 எனின், புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன?

4. (2, 3), (3, 2) புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலை களின் இருபடிக் கூட்டுத்தொகை நிலையானது எனின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன ?

5. பின்வரும் இயங்குவரைகளை வரைக :

(1) $y = 3x + 4.$

(2) $3x + 2y + 7 = 0.$

(3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$

(4) $x^2 + y^2 = 9.$

(5) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0.$

6. (2, 3), (—3, 4) புள்ளிகளோடு கூடி 8·5 பரப்புடைய ஒரு முக்கோணம் அமைய ஒரு புள்ளி இயங்குமெனின் $(x + 5y)\ (x + 5y - 34) = 0$ என்று நிறுவுக.

7. ஆதியிலிருந்து உள்ள தொலையின் இருமடங்கு x ஆயத்தி லுள்ள தொலையாகக் கொண்டு ஒரு புள்ளி இயங்குமெனின், அதன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு என்ன ?

8. A, B நிலைப்புள்ளிகள் $(a, 0)\ (-a, 0)$ எனின், பின்வரும் விதிகளின்படி இயங்கும் P புள்ளியின் இயங்குவரைச் சமன் பாட்டினைக் காண்க :

(1) $PA^2 + PB^2 =$ நிலையெண்.

(2) $PA^2 - PB^2 = 2K^2$. (K நிலையெண்)

(3) $PA + PB = K$. (,,)

(4) $PA = K\ PB$. (,,)

(5) $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$. இங்கு C புள்ளி $(c, 0)$ (c நிலையெண்) ஆகும்.

9. ஒரு புள்ளியின் (—1, 0)-விருந்துள்ள தொலை, (0, 2)-விருந்துள்ள தொலையின் மும்மடங்கு எனின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை யாது ?

10. முக்கோணம் ABC-ன் முனைகளான A, B நிரலே (1, —6), (3, —8) என்றும், C வழிச் செல்லும் நடுக்கோட்டின் நீளம் 5 என்றுமிருப்பின், C-யின் இயங்குவரையினைக் காண்க.

2. கோடுகள்

(Straight Lines)

1. குறித்த இரு புள்ளிகள்வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.—குறித்த புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்று கொள்வோம். அவற்றின்வழிச் செல்லும் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளில் ஒன்ருன P-ஐ (x, y) என்று கொள்க.

ஆகவே, (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஒரே கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளாகும்.

$\therefore$ இப் புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு சுன்னமாகும்.

$$\therefore \tfrac{1}{2}\{x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1)\} = 0.$$

(அ-து) $x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$

(அ-து) $x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_1 - x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1 = 0.$

(அ-து) $x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + y_1(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2) = 0.$

(அ-து) $(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0.$

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}.$$

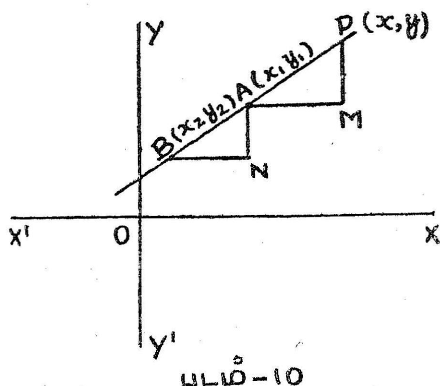
இக் கோட்டினை (x_2, y_2), (x_1, y_1) புள்ளிகள்வழிச் செல்லும் கோடு எனக் கருதினுல், இதன் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \text{ ஆகும்.}$$

பிறிதொரு முறை

A, B புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றும் AB-ல் உள்ள ஒரு புள்ளி P (x, y) என்றும் கொள்வோம். AM, BN இவற்றை OX-க்கு ஒருபோகாகவும், AN, PN இவற்றை OY-க்கு

ஒருபோகாகவும் வரைக. AMP, BNA வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (Similar Triangles) என்று எளிதிற் காணலாம்.



படம்-10

$$\therefore \frac{AM}{BN} = \frac{MP}{NA}.$$

இங்கு $AM = x - x_1$

$BN = x_1 - x_2$

$MP = y - y_1$

$NA = y_1 - y_2$

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

மாதிரி 1 :

ABCD நாற்சிறையின் உச்சிகள் (1, 2) (— 2, —1), (6, 8) (3, 6) எனின் மூலவரைகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

AC மூலவரை A (1, 2), C (6, 8) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடாகும்.

$\therefore$ AC-ன் சமன்பாடு $\dfrac{x-1}{1-6} = \dfrac{y-2}{2-8}$.

(அ-து) $6x - 5y = -4.$

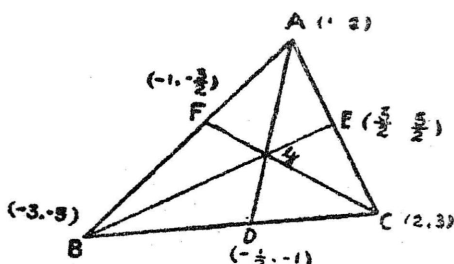
BD மூலவரை B (—2, —1), D (3, 6) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடாகும்.

$\therefore$ BD-ன் சமன்பாடு $\dfrac{x-3}{-2-3} = \dfrac{y-6}{-1-6}$.

(அ-து) $-7x - 5y = -9.$

மாதிரி **2 :**

(1, 2), (—3, —5) (2, 3), புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் யாவை?



படம் 11

இம் முக்கோணத்தை ABC எனக் கொண்டால், அதன் நடுக்கோடுகள் AD, BE, CF. இங்கு D, E, F நிரலே BC, CA, AB-ன் நடுப் புள்ளிகளாகும்.

D-ன் ஆயத் தொலைகள் $\frac{-3+2}{2}, \frac{-5+3}{2}$

(அ-து) $D(-\frac{1}{2}, -1)$

AD-ன் சமன்பாடு $\frac{x-1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{y-2}{2+1}$

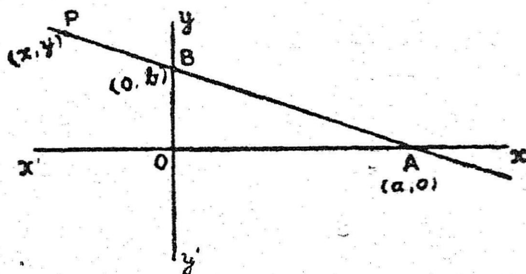
(அ-து) $2x = y$.

இம்மாதிரியே BE-ன் சமன்பாடு $5x = 3y$

CF-ன் சமன்பாடு $3x = 2y$

2, ஆயங்களில் வெட்டுத்துண்டுகளால் (Intercepts) கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காணல் :

ABP கோடு ஆயங்களை A, B புள்ளிகளில் வெட்டும் என்றும், $OA = a$, $OB = b$ என்றும், இக் கோட்டின்கண் புள்ளியான P-ஐ (x, y) என்றும் கொள்க.



படம் 12

ஆகவே, (x, y), $(a, 0)$, $(0, b)$ புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு சுன்னமாகும்.

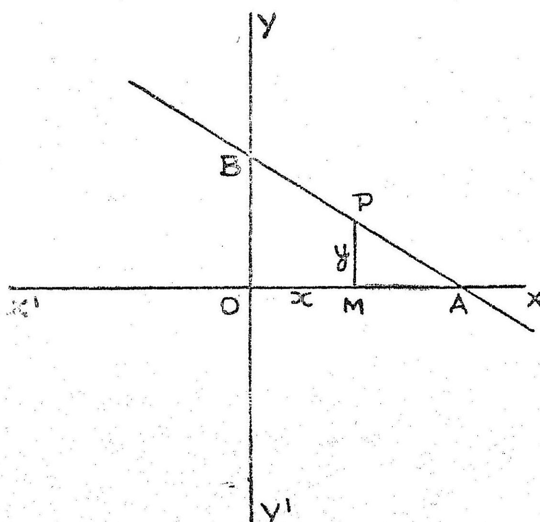
$$\therefore \quad x(0-b)+a(b-y)+0(y-0)=0$$

$$\therefore \quad bx+ay=ab.$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

பிறிதொரு முறை

OX, OY ஆயங்களை $OA = a$, $OB = b$ ஆக வெட்டுங் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளுள் ஒன்றான P-ஐ (x, y) என்று கொள்வோம்.



படம்-13

இங்கு $OM = x$, $MP = y$.

$MA = a - x$.

AMP, AOB வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆதலால்

$$\frac{MP}{MA}=\frac{OB}{OA}.$$

$$\therefore \quad \frac{y}{a-x}=\frac{b}{a}.$$

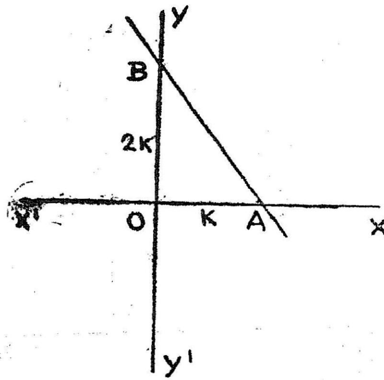
(அ-து) $bx+ay=ab,$

சமன்பாட்டினை ab-யால் வகுத்தால்

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

மாதிரி 3 :

(2, 3) வழிச்செல்லும் கோடு OY-ல் பிறப்பிக்கும் வெட்டுத் துண்டு OX-ல் பிறப்பிக்கும் வெட்டுத் துண்டினும் இருமடங்கு பெரியதாகின், அக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.



படம்-14

இங்கு $2\ OA = OB$.

$OA=k$ எனின், $OB=2k$.

ஆகவே, AB-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{2k}=1$$

இக் கோடு (2, 3) வழிச் செல்வதால்

$$\frac{2}{k}+\frac{3}{2k}=1$$

(அ-து) $\frac{7}{2k}=1$; $k=\frac{7}{2}$

∴ கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{2x}{7}+\frac{y}{7}=1$

(அ-து) $2x+y=7$.

மாதிரி 4 :

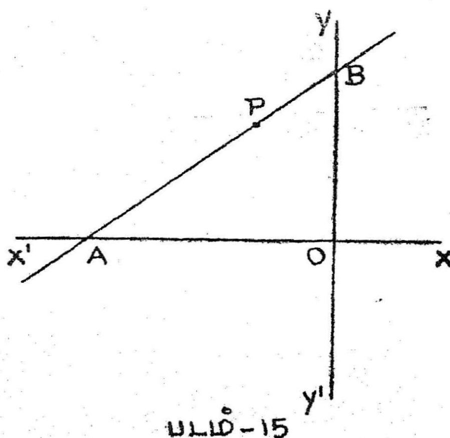
ஆயங்களின் இடைப்பட்ட (— 2, 3) வழிச்செல்லும் கோட்டின் பகுதியை அப்புள்ளி 2 : 3 தகவுக்கேற்பப் பிரிப்பின் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

(— 2, 3)-ஐ P எனவும், OA = a, OB=b எனவும் கொள்க. ஆகவே, A ($-a$, 0), B (0, b) ஆகும்.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$$

∴ P-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$-\frac{3a}{5}, \frac{2b}{5}$$



படம்-15

ஆகவே, $-2 = -\frac{3a}{5}$, $3 = \frac{2b}{5}$

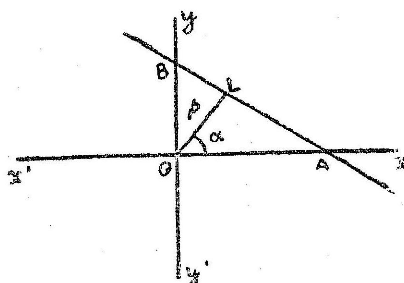
$$\therefore \quad a = \frac{10}{3}, \quad b = \frac{15}{2}$$

AB-ன் சமன்பாடு $\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{15}{2}} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad 9x - 4y + 30 = 0$$

3. ஆதியிலிருந்து கோட்டிற்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு, அக்கோடு x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் இவற்றின் மூலம் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காணல்.



படம் 16.

ஆதியிலிருந்து AB-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு OL $= p$ என்றும், $X\hat{O}L = \alpha$ என்றும் கொண்டால்

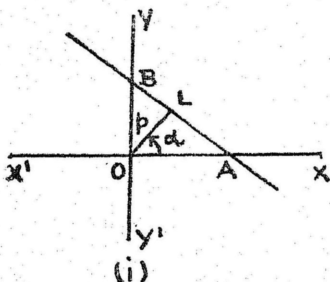
$$OA = p \sec \alpha$$
$$OB = p \operatorname{cosec} \alpha$$

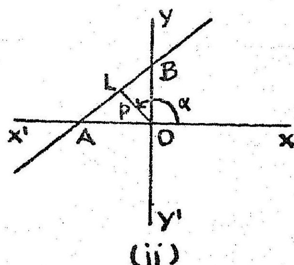
∴ கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$

(அ-து) $$\frac{x}{p \sec\alpha} + \frac{y}{p \operatorname{cosec} \alpha} = 1$$

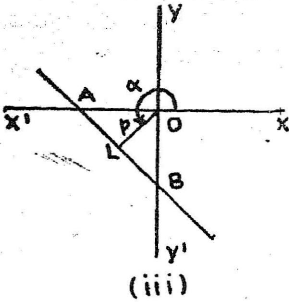
(அ-து) $$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

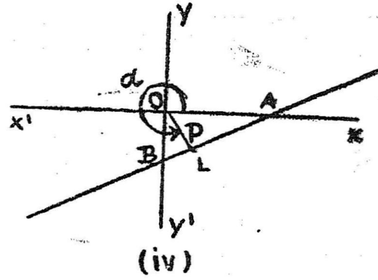
குறிப்பு: கோட்டின் எந் நிலையிலும் p-ஐ மிகையாகவே கருதி $X\hat{O}L$ கோணத்தை OX-லிருந்து இடமாக அளந்தால் இச் சமன்பாடு அந் நிலைக்கெல்லாம் பொருந்தும்.





படம் 17.



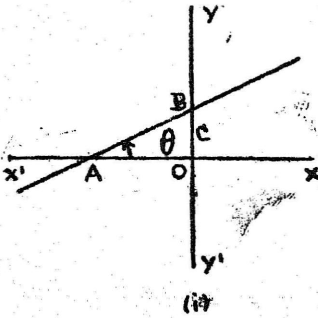


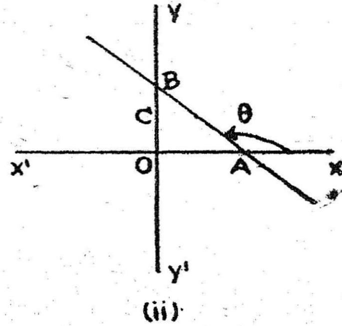
படம் 17.

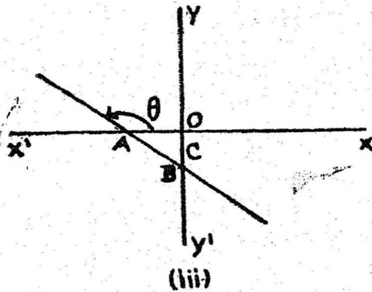
எல்லா நிலைகளுக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

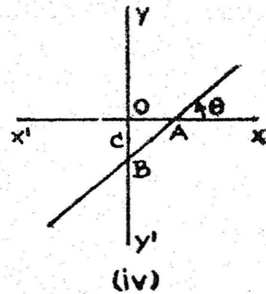
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

4. x ஆயத்தோடு கோணம் θ சாய்ந்து y ஆயத்தில் வெட்டுத் துண்டு c பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு.









படம் 18.

(iii), (iv) படங்களில் c யும், (i), (iii) படங்களில் x-ஆயத்தின் வெட்டுத் துண்டுகளும் குறை மதிப்புடையன. எல்லா

வகைகளிலும் ஆயங்களின் வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே $-c \cot \theta$, c என எளிதிற் காணலாம்.

$$\therefore \text{ கோட்டின் சமன்பாடு } \frac{x}{-c \cot \theta} + \frac{y}{c} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \; y = x \tan \theta + c.$$

$\tan \theta$ க்குப் பதில் m என்று எழுதுவது வழக்கம். ஆகையால் m, x ஆயத்தோடு கோடு பிறப்பிக்கும் கோணத்தின் இருக்கையைக் (Tangent) குறிக்கும்.

கோட்டின் சமன்பாடு $\underline{y = mx + c}$ என்றும் வரும்.

5. $Ax + By + C = 0$ சமன்பாடு ஒரு கோட்டினையே குறிக்கும் என நிறுவுதல்.

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) புள்ளிகள் இச்சமன்பாடு குறிப்பிடும் இயங்குவரையில் உள்ளன என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad Ax_1 + By_1 + C = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$

$$Ax_3 + By_3 + C = 0.$$

இச் சமன்பாடுகளை முறையே $y_2 - y_3$, $y_3 - y_1$, $y_1 - y_2$-ஆல் பெருக்கி வரும் தொகைகளைக் கூட்டின்

$$A[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0.$$

A-க்குச் சுன்ன மதிப்பு இல்லையெனின்

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$$

அஃதாவது (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு சுன்னமாகும். ஆகவே, இம் முப்புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் உள. இவ் வியங்குவரையில் மூன்று புள்ளிகள் எடுத்தால் அவை மூன்றும் ஒரே கோட்டில் இருப்பதால், இவ் வியங்குவரை ஒரு கோடேயாகும்.

பிறிதொரு முறை

இவ் வியங்குவரையில் உள்ள P, Q புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனக் கொண்டால்

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

PQ-ஐ R, K : 1 தகவுக்கேற்பப் பிரித்தால், R-ன் ஆயத் தொலைகள்

$$\frac{x_1 + Kx_2}{1 + K}, \frac{y_1 + Ky_2}{1 + K}$$

இப் புள்ளியும் இயங்குவரையில் இருப்பின்

$$\frac{A\,(x_1 + Kx_2)}{1 + K} + \frac{B\,(y_1 + Ky_2)}{1 + K} + C = 0.$$

(அ-து) $Ax_1 + By_1 + C + K\,(Ax_2 + By_2 + C) = 0$
K-ன் மதிப்பு எதுவாயினும் இக் கட்டுப்பாடு (1)-ஆல் உண்மை யாகும். K-ன் மதிப்புகளுக்கு நேர்நிலையாக P, Q புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் வரும். ஆகவே, P, Q இயங்குவரையில் இரு புள்ளிகள் எனக் கொண்டால் அவற்றை இணைக்கும் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள் அனைத்தும் இவ் வியங்குவரையில் இருக்கும். எனவே, இவ் வியங்குவரை ஒரு கோடேயாகும்.

6. குறிப்பிட்ட கோட்டினைப் பொறுத்த அளவில் A, B, C நிலையெண்களாகும்.

$Ax + By + C = 0$ கோட்டின் 'm'-ஐக் காண $y = mx + c$ வகைப்படி எழுதுதல் வேண்டும்.

அப்பொழுது $m = -\frac{A}{B}$, $c = -\frac{C}{B}$.

இக் கோடு x ஆயத்தோடு 45° சாய்ந்திருப்பின்

$$-\frac{A}{B} = \tan 45° = 1$$

$$\therefore \quad A = -B$$

மேலும், இக் கோடு y-ஆயத்தில் வெட்டுத்துண்டு 5

எனின் $-\frac{C}{B} = 5 \quad \therefore \quad C = -5\,B.$

ஆகவே, இக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$-Bx + By - 5B = 0.$$

(அதாவது) $x - y + 5 = 0.$

இவ்வாறு குறிப்பிட்ட ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டிலுள்ள நிலையெண்களைக் காண இயலும்.

x ஆயத்தோடு 45° சாய்ந்து y ஆயத்தில் வெட்டுத்துண்டு 5-ஐப் பிறப்பிக்கும் கோடு ஒன்றுதான் உண்டு. ஆகையால், ஒவ்வொரு கோட்டுக்கும் ஒரு நிலையெண் தொடர் (Set of Constants) உண்டு. தலைமாற்றி யுரைப்பின் சமன்பாட்டில் வரும் ஒவ்வொரு நிலையெண் தொடருக்கும் ஒரு கோடு உண்டு.

7. இதுகாறும் ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டினைப் பல்வேறு விதமாகக் கண்டோம். அவை பின்வருமாறு :

(1) $y = mx + c$

(2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

(3) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

(4) $Ax + By + C = 0.$

குறித்த இரு புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும், அல்லது குறித்த போக்கோடு குறித்த கோணத்தைப் பிறப்பித்துக் குறித்த புள்ளிவழிச் செல்லும் என்பது போன்ற இரு கட்டுப்பாடுகள் உடைய ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டில் தம்முள் தொடர்பற்ற இரு எண்கள் இருக்கும்.

நான்காவது வகை நீங்கிய மற்றைய வகைகளிலெல்லாம் இரு எண்களே உள. நான்காவது வகையில் மூன்று எண்கள் இருப்பினும் அம் மூன்றுள் ஓர் எண்ணைக்கொண்டு வகுத்து இரண்டு எண்கள் வரச்செய்யலாம். எடுத்துக்காட்டாக, B ஆல் வகுத்தால் நான்காவது சமன்பாடு

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ என்று வரும்.

இங்கு $-\frac{A}{B} = m,\ -\frac{C}{B} = c$ என்று கொண்டால் முதல் வகையான $y = mx + c$ வரும்.

$-C$ ஆல் வகுத்தால் $-\frac{Ax}{C} - \frac{By}{C} = 1$ என்று வரும்.

இங்கு $-\frac{C}{A} = a, -\frac{C}{B} = b$ என்று கொண்டால் இரண்டாவது வகையான $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ வரும்.

$\sqrt{A^2 + B^2}$ ஆல் வகுத்தால்

$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,y = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ என்று வரும்.

$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \alpha$ எனக் கொண்டால், $\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$-\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$-ஐ p எனக் குறித்தால் நான்காவது வகையான

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ வரும்.

இதனால், ஒரு வகையை மற்றொரு வகையாக மாற்றலாம் என்று அறியலாம்.

8. ஏனைய வகைகள். (1) (x_1, y_1) புள்ளிவழிச் செல்லும் குறித்த 'm' சாய்வு வீதம் உடைய கோட்டின் சமன்பாடு.

$y = mx + c$ எனக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் கொள்வோம். $(x_1\ y_1)$ வழியாக இக் கோடு செல்வதால் இச் சமன்பாட்டில் x_1, y_1 இணங்கவேண்டும்.

$$\therefore\quad y_1 = mx_1 + c.$$

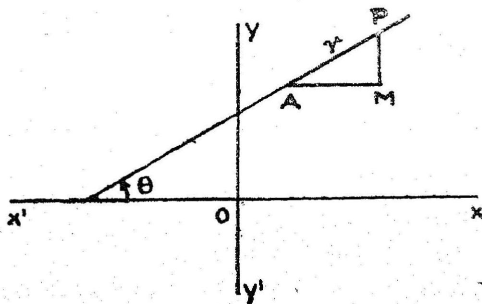
$$(\text{அ-து})\quad c = y_1 - mx_1.$$

ஆகவே, சமன்பாடு $y = mx + y_1 - mx_1$ என்று வரும்.

$$(\text{அ-து})\quad \underline{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

(2) (x_1, y_1) வழி OX ஒரு θ கோணம் பிறக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு.

P $(x,\ y)$ என்றும், A (x_1, y_1) என்றும் A-யிலிருந்து P-யின் தொலை r என்றும் கொள்வோம். AM-ஐ OX-க்கு இணையாகவும், PM-ஐ OY-க்கு இணையாகவும் வரைக.



படம்-19

$$\text{AM} = \text{AP}\cos\theta,\ \text{MP} = \text{AP}\sin\theta$$

இங்கு $\text{AM} = x - x_1$, $\text{MP} = y - y_1$

$$\therefore\quad x - x_1 = r\cos\theta.\quad y - y_1 = r\sin\theta.$$

$\therefore$ இக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r.$$

இங்கு $\tan\theta = m$ எனின், $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ என்று கோட்டின் சமன்பாடு வரும்.

இவ்வகையால் குறித்த இரு புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

(1, 2) (3, 4) குறித்த இரு புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம். கோட்டின் சாய்வு வீதம் 'm' என்று கொண்டால் (1, 2) வழி இக் கோடு செல்வதால் அதன் சமன்பாடு

$$y - 2 = m(x - 1)$$

(3, —4) புள்ளி இக் கோட்டில் இருத்தலின்

$$-4 - 2 = m(3 - 1)$$

$$\therefore \quad m = -3$$

$\therefore$ கோட்டின் சமன்பாடு $y - 2 = -3(x - 1)$

(அ-து) $3x + y = 5.$

இவ்வகையால் குறித்த புள்ளி (x_1, y_1)-லிருந்து அக் கோட்டில் இருக்கும் புள்ளி ஒன்றின் தொலை தெரியவரின் அப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளை எளிதிற் காணலாம்.

அவை $x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta.$

மாதிரி 5 :

(4, 1) புள்ளிவழி x ஆயத்தோடு கூடி 135° பிறப்பிக்கும் கோடு வழி அப் புள்ளியிலிருந்து $3x - y = 0$ கோட்டின் தொலை என்ன?

(4, 1) வழி x ஆயத்தோடு கூடி 135° பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x - 4}{\cos 135^\circ} = \dfrac{y - 1}{\sin 135^\circ} = r.$

$\therefore$ இக்கோட்டில் (4, 1)-லிருந்து r தொலைக்கப்பால் இருக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(4 + r\cos 135^\circ,\ 1 + r\sin 135^\circ)$.

(அ-து) $\left(4 - \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ 1 + \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$

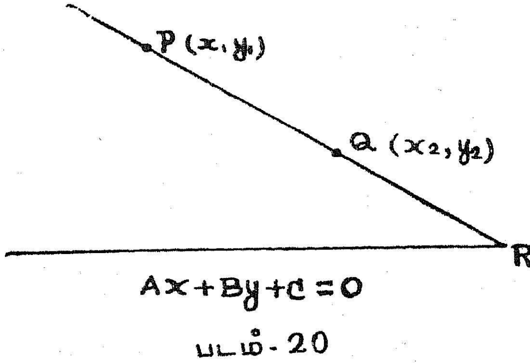
$3x - y = 0$ கோடு (4, 1)-லிருந்து இக் கோடுவழி r தொலைக் கப்பால் இருப்பின் $\left(4 - \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ 1 + \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ புள்ளி $3x - y = 0$-ல் இருக்கும்.

$$\therefore \quad 3\left(4 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\therefore \quad r = \frac{11\sqrt{2}}{4}$$

குறிப்பு. $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ கோட்டினை $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = r$ என்று எழுதுவதும் உண்டு. இங்கு $l^2 + m^2 = 1.$

9. $Ax + By + C = 0$ கோடு, $P(x_1, y_1)$ $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டினை எத் தகவுப்படி பிரிக்குமெனக் காணல்.



படம் - 20

$Ax + By + C = 0$ கோட்டினை PQ, R-ல் வெட்டுமெனவும் $\frac{PR}{RQ} = K$ எனவும் கொள்வோம்.

அந்நிலையில் R-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$\frac{Kx_2 + x_1}{K + 1}, \ \frac{Ky_2 + y_1}{K + 1}$$

$Ax + By + C = 0$-ல் R இருத்தலின்

$$\frac{A(Kx_2 + x_1)}{K + 1} + \frac{B(Ky_2 + y_1)}{K + 1} + C = 0$$

(அ-து) $K(Ax_2 + By_2 + C) + (Ax_1 + By_1 + C) = 0$

$$\therefore \quad K = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

கிளைத்தேற்றம் : 1. $Ax_1 + By_1 + C$, $Ax_2 + By_2 + C$ ஒரே குறியுடையதாய் இருப்பின் K-ன் மதிப்புக் குறையாகும்.

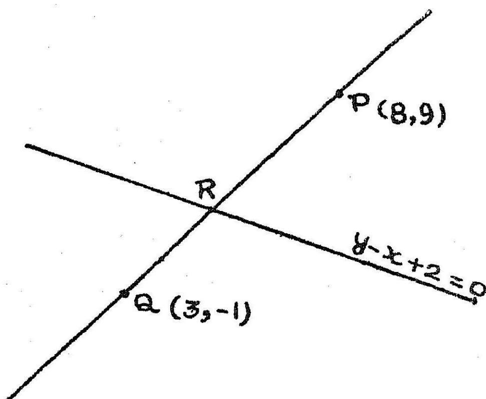
அந் நிலையில் R, PQ-க்கு வெளியே இருக்கும். ஆகவே, $Ax_1 + By_1 + C$, $Ax_2 + By_2 + C$ ஒரே குறியுடையதாகின் P,Q புள்ளிகள் $Ax + By + C = 0$ கோட்டினுக்கு ஒரே பக்கத்தனவாகும்.

கிளைத்தேற்றம் : 2. $Ax_1 + By_1 + C$, $Ax_2 + By_2 + C$ மாறுபட்ட குறியுடையதாயின் $Ax + By + C = 0$ கோடு PQ-ஐ

வெட்டும் புள்ளி R, PQ-ன் உள்ளிருக்கும். அந் நிலையில் P, Q புள்ளிகள் $Ax + By + C = 0$ கோட்டின் இரு பக்கத் தனவாகும்.

மாதிரி 6 :

$y - x + 2 = 0$ கோடு P (8, 9), Q (3, −1) புள்ளிகளை இணைக்குங்கோட்டினை R-ல் 3:2 என்னும் தகவில் பிரிக்கும் என நிறுவுக.



படம்-21

$\frac{PR}{RQ} = K$ என்று கொள்க.

R-ன் ஆயத்தொலைகள் $\frac{3K + 8}{K + 1}$, $\frac{-K + 9}{K + 1}$

R ஆனது $y - x + 2 = 0$-ல் இருத்தலின்

$$\frac{-K + 9}{K + 1} - \frac{3K + 8}{K + 1} + 2 = 0.$$

(அ-து) $-K + 9 - (3K + 8) + 2(K + 1) = 0$

$-2K + 3 = 0.$

$\therefore K = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{PR}{RQ} = \frac{3}{2}$

மாதிரி 7 :

$3x - 2y = 1$ கோட்டிற்கு ஆதியின் எதிர்ப் பக்கத்திலும், $2x - 3y = 1$ கோட்டிற்கு ஆதியின் தன் பக்கத்திலும் (3, 2) புள்ளி உண்டு என நிறுவுக.

முதற்கோட்டின் சமன்பாடு $3x - 2y - 1 = 0$,

$Ax_1 + By_1 + C$, $Ax_2 + By_2 + C$ மாறுபட்ட குறியுடைய தாயின் $Ax + By + C = 0$ கோட்டின் இரு பக்கத்திலும் (x_1, y_1), (x_2, y_2) இருக்கும்.

ஆதியிடத்து $3x - 2y - 1$-ன் மதிப்பு -1.

$(3, 2)$ இடத்து $3x - 2y - 1$-ன் மதிப்பு $+4$.

ஆகவே, ஆதியும், $(3, 2)$-ம் $3x - 2y - 1 = 0$-க்கு இரு பக்கத்திலும் உள்ளன.

ஆதியிடத்து $2x - 3y - 1$-ன் மதிப்பு -1.

$(3, 2)$ இடத்து $2x - 3y - 1$-ன் மதிப்பு -1.

ஆகவே, $(3,2)$-ம், ஆதியும், $2x - 3y - 1 = 0$-க்கு ஒரே பக்கத்தில் உள.

பயிற்சிகள் 4

1. பின்வரும் கோடுகளின் சாய்வு வீதங்கள் யாவை ?

(1) $2x - 5y = 7$.

(2) $3x + 4y - 2 = 0$.

(3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

(4) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

2 பின்வரும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க:

(1) $(3, 4)$, $(-5, 6)$.

(2) $(-2, 4)$, $(0, 1)$.

(3) $(2, -6)$ $(-3, 7)$

(4) $(-1, -2)$, $(-3, -4)$.

3. $(1, 1)$, $(-9, 5)$, $(6, -1)$ புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் உளவென நிறுவுக.

4. பின்வருஞ் சமன்பாடுகளை வெட்டுத்துண்டு வகைப்படி எழுதி, ஆயங்களில் பிறக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க :

(1) $7x - 8y = 15$.

(2) $4x + 5y - 12 = 0$.

(3) $2x + y = 6$.

(4) $5x + 7y + 8 = 0$.

5 பின்வருங் கோடுகளின் சமன்பாட்டினைக் காண்க :

(1) $(-1, 2)$ வழி -8 சாய்வு வீதம் உடைய கோடு.

(2) x ஆயத்தில் வெட்டுத் துண்டு 4 பிறப்பிக்கும், $(2, -3)$ வழிச் செல்லும் கோடு.

(3) ஆதி, $(2, 7)$ புள்ளிகள்வழிச் செல்லுங் கோடு.

(4) $p = 5$, $\alpha = 135°$ உடைய கோடு.

(5) $(2, 5)$ வழி ஆயங்களில் சமவெட்டுத் துண்டுகள் பிறப்பிக்குங் கோடு.

6. பின்வரும் சமன்பாடுகளை $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ வகைக்கு மாற்றுக :

(1) $3x + 4y = 15$.

(2) $12x - 5y + 10 = 0$.

7 $(3, 1), (5, -1)$ புள்ளிகள்வழிச் செல்லும் கோடு ஆயங்களில் சமவெட்டுத் துண்டுகளைப் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

8. பின் குறித்த புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணங்களின் பக்கங்களைக் காண்க :

(1) $(2, 5)$. $(3, 2)$, $(0, -3)$.

(2) $(-1, 2)$, $(3, 2)$, $(-3, -4)$.

9. $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(-3, -5)$ புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் (medians) யாவை ?

10. $(2, -1)$, $(1, 1)$ புள்ளிகள் $3x + 2y = 6$ கோட்டினுக்கு ஆதி பக்கத்தில் உண்டு, இல்லை என்பதைக் காண்க.

11. $(1, -2)$, $(3, 1)$ புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடு $(4, -1)$ $(-1, 1)$ புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டினை எத் தகவுப்படி பிரிக்கும் ?

12. (x_0, y_0) நிலைப்புள்ளிவழிச் செல்லும் கோட்டின் ஆயங்களிடைப்பட்ட பகுதியின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை

$$\frac{x_0}{2x} + \frac{y_0}{2y} = 1$$ என நிறுவுக.

13. ஆயங்கள் இடைப்பட்ட ஒரு கோட்டின் பகுதியை (x_1, y_1) சம பங்காகப் பிரித்தால், கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$ என நிறுவுக.

14. $4x + 3y = 12$, $4x + 3y = 3$ ஒருபோகான கோடுகளுக் கிடையில் $(-2, -7)$ வழிச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் நீளம் 3 எனின், அக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

15. $(3, 5)$, $(4, 6)$ புள்ளிகள்வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ? ஆயங்களின் இடைப்பட்ட இக் கோட்டுப் பகுதியின் நீளம் என்ன ? இப் பகுதியை $x = 10$ கோடு எத் தகவுப்படி பிரிக்கும் ?

16. p மாறு இராசியெனின் ஆயங்களின் இடைப்பட்ட $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ கோட்டுப் பகுதியின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரையைக் காண்க.

10. இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி.

கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $ax + by + c = 0$, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ என்று கொள்வோம். இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் இச் சமன்பாடுகளில் பொருந்த வேண்டும். ஆகவே, இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் காணலாம். வெட்டும் புள்ளியை (x_1, y_1) என்று கொண்டால்

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$

$$\therefore \frac{x_1}{bc_1 - b_1c} = \frac{y_1}{ca_1 - c_1a} = \frac{1}{ab_1 - a_1b}$$

எனவே, வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}\right)$.

குறிப்பு : $ab_1 - a_1b = 0$ எனின் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளின் மதிப்புப் பொருளற்றதாக ஆகின்றது.

$ab_1 - a_1b = 0$ எனின் $\frac{-a}{b} = \frac{-a_1}{b_1}$. இந் நிலையில் இரு கோடு களும் ஒருபோகானவை என்று 13ஆவது பகுதியில் நிறுவப் படும்.

11. மூன்று கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்வதற்கு விதி.

கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $ax + by + c = 0$, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ என்று கொள்வோம்.

இம் முக்கோடுகளும் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்ல, மூன்றுவது கோடு முதல் இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லுதல் வேண்டும்.

முதல் இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியாகிய $\left(\frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}\right)$ மூன்ருவது கோட்டில் இருப்பதால்

$$a_2 \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} + b_2 \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b} + c_2 = 0.$$

(அ-து) $a_2 (bc_1 - b_1c) + b_2 (ca_1 - c_1a) + c_2 (ab_1 - a_1b) = 0.$

மாதிரி 8

$2x + 7y = 25$, $7x - 2y = 8$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி யாது ?

இவ்விரு சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$$2x + 7y - 25 = 0.$$
$$7x - 2y - 8 = 0.$$

$$\therefore \frac{x}{-56 - 50} = \frac{y}{-175 + 16} = \frac{1}{-4 - 49}$$

(அ-து) $\frac{x}{-106} = \frac{y}{-159} = \frac{1}{-53}$

$\therefore \quad x = 2, \quad y = 3.$

$\therefore$ வெட்டும் புள்ளி (2, 3)

மாதிரி 9 :

$5x - y = 9$. $x + 6y = 8$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி, (3, 4) புள்ளி இவை வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

முதற்கண் $5x - y = 9$, $x + 6y = 8$. இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் காணவேண்டும். இவ்விரு சமன் பாடுகளை விடுத்தால் $x = 2$, $y = 1$ என்று வரும்.

$\therefore$ வெட்டும் புள்ளி (2, 1) ஆகும்.

எனவே, (2, 1), (3, 4) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோடு காணல் வேண்டும்.

அதன் சமன்பாடு $\frac{y - 1}{1 - 4} = \frac{x - 2}{2 - 3}$

(அ-து) $3x - y - 5 = 0$

மாதிரி 10 :

$x - 6y + a = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$, $x + 4y + 1 = 0$ கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்ருல் a-ன் மதிப்பு என்ன ?

$2x + 3y + 4 = 0$, $x + 4y + 1 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $\left(-\frac{13}{5}, \frac{2}{5}\right)$ என இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்துக் காணலாம்.

இம் மூன்று கோடுகளும் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்வதால் $\left(-\frac{13}{5}, \frac{2}{5}\right)$ புள்ளி முதற் கோட்டில் இருக்கும்.

$$\therefore \quad -\frac{13}{5} - \frac{12}{5} + a = 0$$

$$\therefore \quad a = 5.$$

12. x, y-ன் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $p\,(ax + by + c) + q\,(a_1x + b_1y + c_1) + r\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ ஆக p, q, r நிலையெண்கள் காண இயலுமாயின் $ax + by + c + 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும்.

$ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொண்டால்,

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \quad a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

இம் முக்கோடுகளும் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால், மூன்றாவது கோடான $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, (x_1, y_1) வழிச் செல்லவேண்டும்.

அதற்காக $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$ என்று நிறுவவேண்டும். $p\,(ax + by + c) + q\,(a_1x + b_1y + c_1) + r\,(a_2x + b_2y + c) = 0$ எல்லா x, y மதிப்புகளுக்கும் உரியதாதலின் $p\,(ax_1 + by_1 + c) + q\,(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) + r\,(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0$.

$ax_1 + by_1 + c = 0$, $a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$ ஆதலின்

$$r\,(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0$$

$$\therefore \quad a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$$

ஆகவே, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $(x_1\ y_1)$ வழிச்செல்லும்.

மாதிரி 11 :

$4x + 7y - 9 = 0$, $5x - 8y + 15 = 0$, $9x - y + 6 = 0$ கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்வன என நிறுவுக.

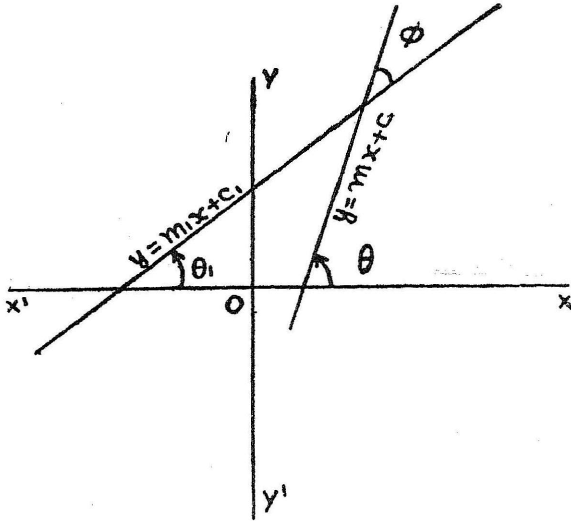
$p\,(4x + 7y - 9) + q\,(5x - 8y + 15) + r\,(9x - y + 6) = 0$ ஆக p, q, r நிலையெண்கள் காண இயலுமாயின் இம் மூன்று கோடுகளும் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும்.

$p = 1$, $q = 1$, $r = -1$ எனின்

$p\,(4x + 7y - 9) + q\,(5x - 8y + 15) + r\,(9x - y + 6) =$

$\therefore$ இக்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழிச் செல்வன.

13. இரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம்.



படம்-22

இவ்விரு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $y = mx + c$, $y = m_1x + c_1$ என்றும் அவை x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் θ, θ_1 என்றும் கொள்வோம். ஆகவே, $m = \tan\theta$, $m_1 = \tan\theta_1$. இவ்விரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் φ எனின்

$$\phi = \theta - \theta_1$$

$$\tan\phi = \tan(\theta - \theta_1)$$

$$= \frac{\tan\theta - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta\tan\theta_1}$$

$$= \frac{m - m_1}{1 + mm_1}$$

$$\therefore \phi = \tan^{-1}\left(\frac{m - m_1}{1 + mm_1}\right)$$

கிளைத்தேற்றம் : இவ்விரு கோடுகள் ஒருபோகாக இருப்பின் அவற்றின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் அளவு சுன்னமாகும்.

$$\therefore \quad \tan\phi = 0$$

(அ-து) $$\frac{m - m_1}{1 + m_1m_1} = 0$$

$$\therefore \quad m = m_1$$

ஆகவே, $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ கோடுகள் ஒருபோகாக இருப்பதற்கு $-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1}$ என்றிருத்தல் வேண்டும். ஏனெனின், முதற்கோட்டினை $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ என எழுதினால், அதன் 'm' $= -\frac{A}{B}$ ஆகும். இம்மாதிரியே இரண்டாவது கோட்டினை $y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$ என்று எழுதினால், அதன் 'm' $= -\frac{A_1}{B_1}$.

∴ இவ்விரு கோடுகளும் ஒருபோகாக இருப்பின் $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{B}$

$$\therefore \frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B}.$$

இத்தகவுகளை K எனக் கொண்டால்

$$A_1 = AK,\ B_1 = BK.$$

ஆகவே, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ கோடு $K(Ax + By) + C_1 = 0$ என்று வரும்.

$$(\text{அ-து})\ Ax + By + \frac{C_1}{K} = 0$$

$\frac{C_1}{K_1}$ -ஐ D எனக் கொண்டால் கோட்டின் சமன்பாடு

$$Ax + By + D = 0$$

ஆகவே, $Ax + By + D = 0$ கோடு $Ax + By + C = 0$ கோட்டினுக்கு இணையாக உளது.

எனவே, இரு கோடுகள் ஒருபோகாக அமைவதற்கு அவற்றின் சமன்பாடுகளில் எண் உறுப்பில்மட்டும் வேற்றுமை இருந்தாற் போதும். இதனால் ஒரு கோட்டுக்கு ஒருபோகாக இருக்கும் மற்றொரு கோட்டின் சமன்பாடு எழுத எண் உறுப்பை மட்டும் மாற்றினாற்போதும்.

மாதிரி 1 : (a) :

(1, 2) வழி, $3x - 2y + 7 = 0$ கோட்டுக்கு ஒருபோகாக இருக்குங் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

$3x - 2y + 7 = 0$-க்கு ஒருபோகாக இருக்குங் கோட்டின் சமன்பாடு $3x - 2y + K = 0$.

இக் கோடு (1, 2) வழிச் செல்வதால்

$$3 - 4 + K = 0$$
$$\therefore K = 1$$

ஆகவே, வேண்டிய கோட்டின் சமன்பாடு $3x - 2y + 1 = 0$.

மாதிரி 12

$2x - 7y = 20$ -க்கு ஒருபோகாக y ஆயத்தில் -7 வெட்டுத் துண்டு பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

$2x - 7y = 20$ -க்கு ஒருபோகாக இருக்குங் கோட்டின் சமன்பாடு $2x - 7y = K$

இச் சமன்பாட்டினை $\frac{x}{\frac{K}{2}} + \frac{y}{\frac{-K}{7}} = 1$ என்று எழுதலாம்.

ஆகவே, y ஆயத்தின் வெட்டுத்துண்டு $= -\frac{K}{7}$

$$\therefore \quad -\frac{K}{7} = -7$$

$$\therefore \quad K = 49$$

எனவே, கோட்டின் சமன்பாடு $2x - 7y = 49$.

கிளைத்தேற்றம் 2. $y = mx + c$, $y = m_1 x + c_1$, கோடுகள் தம்முள் நேர்க்குத்தாயின் அக்கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் $90°$.

$$\therefore \quad \cot \phi = 0$$

(அ-து) $\frac{1 + mm_1}{m - m_1} = 0.$

$$\therefore \ 1 + mm_1 = 0$$

ஆகவே, $mm_1 = -1$.

எனவே, இருகோடுகள் தம்முள் நேர்க்குத்தாயின் அவற்றின் 'm' களின் பெருக்குத் தொகை $= -1$

இதனால் $Ax + By + C = 0$ -க்கு நேர்க்குத்தாகும் கோட்டின் சமன்பாடு $Bx - Ay + K = 0$ என்று எளிதிற் காணலாம்.

மாதிரி 13 :

$5x + 6y = 20$, $18x - 15y = 37$ என்பவை நேர்குத்துக் கோடுகள் என நிறுவுக.

முதற் கோட்டின் 'm' $= -\frac{5}{6}$

இரண்டாவது கோட்டின் 'm' $= \frac{18}{15}$.

ஆகவே, இவ்விரு கோட்டு 'm' களின் பெருக்குத் தொகை $= -1$.

$\therefore$ இவ்விரு கோடுகளும் நேர்க்குத்துக் கோடுகள்.

மாதிரி 14 :

$3x + 4y + 28 = 0$ கோட்டிற்கு நேர்குத்தாக $(-1, 4)$ வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

$3x + 4y + 28 = 0$-க்கு நேர்குத்தாகும் கோட்டின் சமன்பாடு $4x - 3y + K = 0$.

இக் கோடு $(-1, 4)$ வழிச் செல்வதால் $-4 - 12 + K = 0$

$$\therefore K = 16.$$

$\therefore$ வேண்டிய கோட்டின் சமன்பாடு $4x - 3y + 16 = 0$.

மாதிரி 15 :

$3x - 2y + 9 = 0$, $2x + y - 9 = 0$ கோடுகளிடைப்பட்ட குறுங்கோணம் யாது ?

முதற்கோட்டின் 'm' $= \frac{3}{2}$.

இரண்டாவது கோட்டின் 'm' $= -2$

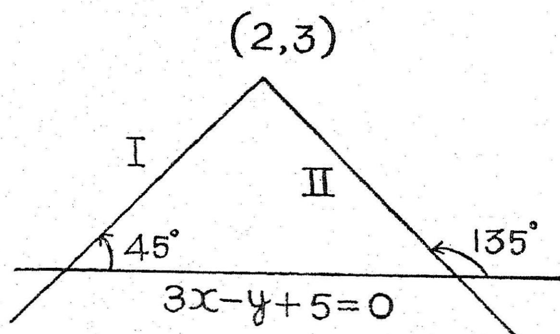
இக்கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ

$$\tan \phi = \frac{\left(\frac{3}{2}\right) - \left(-2\right)}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(-2\right)}$$

$$= \frac{\frac{7}{2}}{-2} = -\frac{7}{4}.$$

$\therefore$ குறுங்கோணத்தின் அளவு $= \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$

குறை மதிப்பினுல் கோடுகளின் இடைப்பட்ட விரிகோணத்தின் அளவைக் காணலாம்.



படம்-23

மாதிரி 16 :

(2, 3) புள்ளிவழி $3x - y + 5 = 0$ உடன் $45°$ பிறப்பிக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு என்ன ?

அத்தகைய கோட்டின் சாய்வு வீதம் m என்று கொண்டால், அதன் சமன்பாடு $y - 3 = m(x - 2)$.

$3x - y + 5 = 0$-ன் 'm' $= 3$

$$\therefore \tan 45° = \frac{3 - m}{1 + 3m}$$

$$(\text{அ-து})\ 1 = \frac{3 - m}{1 + 3m}$$

$$\therefore 4m = 2$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}$$

I முதற்கோட்டின் சமன்பாடு $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

(அ-து) $x - 2y + 4 = 0$

$$\tan 135° = \frac{3 - m}{1 + 3m}$$

$$\therefore -1 = \frac{3 - m}{1 + 3m} \qquad \therefore m = -2$$

II ஆவது கோட்டின் சமன்பாடு $y - 3 = -2(x - 2)$

(அ-து) $2x + y = 7$.

14. குறித்த இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

குறித்த இரு கோடுகளின் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ என்று கொள்வோம்.

$ax + by + c + K(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ சமன்பாட்டினைப் பார்ப்போம்.

இங்கு K ஒரு நிலையெண்

இது ஒருபடிச் சமன்பாடு (Equation of the first Degree) ; எனவே, ஒரு கோட்டினையே குறிக்கும்.

$(x_1, y_1.)$ வெட்டும் புள்ளி எனக்கொண்டால்,

$ax_1 + by_1 + c = 0,\ a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$

$\therefore ax_1 + by_1 + c + K(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) = 0$

ஆகவே, $ax + by + c + K(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ (x_1, y_1) வழிச் செல்லும்

K-ன் மதிப்புகளுக்குத் தக (x_1, y_1) வழிச்செல்லும் பல கோடுகள் வரும்.

மாதிரி 17

$2x + y = 8$, $3x - 2y + 7 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி $4x + y - 11 = 0$-க்கு ஒருபோகான கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

முதல் இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$2x + y - 8 + K(3x - 2y + 7) = 0$$

(அ-து) $(2 + 3K)x + (1 - 2K)y + 7K - 8 = 0$

இக்கோடு $4x + y - 11 = 0$-க்கு ஒருபோகாக இருத்தலின் இவ் கோடுகளின் 'm' கள் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore -\frac{2 + 3K}{1 - 2K} = -4$$

(அ-து) $2 + 3K = 4 - 8K$

(அ-து) $K = \frac{2}{11}$

ஆகவே, வேண்டிய கோட்டின் சமன்பாடு

$$2x + y - 8 + \frac{2}{11}(3x - 2y + 7) = 0$$

(அ-து) $28x + 7y - 74 = 0$

மாதிரி 18 :

$3x - 5y + 11 = 0$-க்கு நேர்குத்தாக $5x - 6y = 1$, $3x + 2y + 5 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

$5x - 6y = 1$, $3x + 2y + 5 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$5x - 6y - 1 + K(3x + 2y + 5) = 0$$

$$(5 + 3K)x + (-6 + 2K)y + 5K - 1 = 0$$

இக்கோடு $3x - 5y + 11 + 0$-க்கு நேர்குத்தாக இருத்தலின் இவ்விரு கோட்டு 'm' களின் பெருக்குத்தொகை -1 ஆகும்.

$$\therefore -\frac{5 + 3K}{-6 + 2K} \times \frac{3}{5} = -1 \therefore K = 45$$

ஆகவே, கோட்டின் சமன்பாடு

$5x - 6y - 1 + 45(3x + 2y + 5) = 0.$

(அ-து) $5x + 3y + 8 = 0.$

மாதிரி 19 :

$3x - 4y + 1 = 0$, $2x - 5y - 1 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழி ஆயங்களில் சமவெட்டுத் துண்டுகளைப் பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

$3x - 4y + 1 = 0$, $2x - 5y - 1 = 0$ கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$3x - 4y + 1 + K(2x - 5y - 1) = 0$$

(அ-து) $(3 + 2K)x + (-4 - 5K)y + 1 - K = 0$

(அ-து) $$\frac{(2K+3)x}{K-1} + \frac{(-5K-4)y}{K-1} = 1$$

(அ-து) $$\frac{x}{\frac{K-1}{2K+3}} + \frac{y}{\frac{K-1}{-5K-4}} = 1$$

$$\therefore \frac{K-1}{2K+3} = \frac{K-1}{-5K-4} \quad \text{(அ-து)} \quad K = -1$$

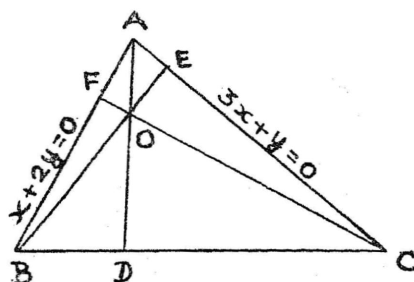
ஆகவே, கோட்டின் சமன்பாடு

$$3x - 4y + 1 - (2x - 5y - 1) = 0$$

(அ-து) $$x + y + 2 = 0.$$

மாதிரி 20

$x + 2y = 0$, $4x + 3y = 5$, $3x + y = 0$ கோடுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் (**Ortho centre**) என்ன ?



படம்-24

A, B வழிச்செல்லும் செங்கோடுகள் முறையே AD, BE எனக் கொள்வோம்.

AD, A வழிச் செல்வதால், அதன் சமன்பாடு

$$x + 2y + K(3x + y) = 0$$

ஆகவே, AD-ன் 'm' $= -\frac{3K+1}{2+K}$.

AD, BC-க்கு நேர்குத்தாக இருத்தலின் AD, BC கோட்டு 'm' களின் பெருக்குத் தொகை $= -1$.

$$\therefore -\frac{3K+1}{2+K} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1$$

(அ-து) $$K = -\frac{2}{3}.$$

ஆகவே, AD-ன் சமன்பாடு $x + 2y - \frac{2}{3}(3x + y) = 0$

(அ-து) $3x - 4y = 0.$

இம்மாதிரியே BE-ன் சமன்பாடுங் காணலாம்.

BE, B வழிச் செல்வதால் அதன் சமன்பாடு

$$4x + 3y - 5 + l(x + 2y) = 0$$

$\therefore$ BE-ன் 'm' $= -\dfrac{4 + l}{3 + 2l}$

AC-ன் 'm' $= -3$

$$\therefore \quad (-3)\left(-\frac{4 + l}{3 + 2l}\right) = -1$$

(அ-து) $l = -3$

$\therefore$ BE-ன் சமன்பாடு $4x + 3y - 5 - 3(x + 2y) = 0$

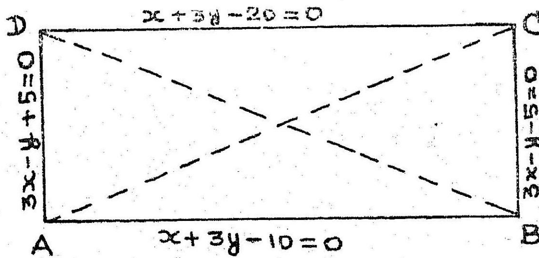
(அ-து) $x - 3y - 5 = 0.$

AD, BE செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி O செங்கோட்டு மையமாகும். ஆகவே, O-ன் ஆயத்தொலைகளைக் காண $x - 3y - 5 = 0$, $3x - 4y = 0$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தல் வேண்டும்.

$\therefore$ O-ன் ஆயத்தொலைகள் $(-4, -3)$.

மாதிரி 21 :

$x + 3y - 10 = 1$, $x + 3y - 20 = 0$, $3x - y + 5 = 0$ $3x - y - 5 = 0$ கோடுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட நீள் சதுரத்தின் மூலவரைகளின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. அவை $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$ புள்ளியில் வெட்டுமென நிறுவுக.



படம் - 25

AC மூலவரை A வழிச் செல்வதால் அதன் சமன்பாடு

$$x + 3y - 10 + K(3x - y + 5) = 0.$$

C-ன் ஆயத்தொலைகள் $x + 3y - 20 = 0$, $3x - y - 5 = 0$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் கிடைக்கும்.

C-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$

AC, C வழிச் செல்வதால்

$$\frac{7}{2} + 3\left(\frac{11}{2}\right) - 10 + K\left(\frac{21}{2} - \frac{11}{2} + 5\right) = 0$$

$\therefore \quad K = -1$

ஆகவே, AC-ன் சமன்பாடு $x + 3y - 10 - 1\,(3x - y + 5) = 0$

(அ-து) $2x - 4y + 15 = 0.$

BD மூலவரை B வழிச் செல்வதால் அதன் சமன்பாடு

$(x + 3y - 10) + \lambda\,(3x - y - 5) = 0$

D-ன் ஆயத் தொலைகள் $x + 3y - 20 = 0,\ 3x - y + 5 = 0$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் கிடைக்கும்.

$\therefore$ D-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$

BD, D வழிச் செல்வதால்

$$\frac{1}{2} + 3\left(\frac{13}{2}\right) - 10 + \lambda\left(\frac{3}{2} - \frac{13}{2} - 5\right) = 0$$

$\therefore \quad \lambda = 1.$

ஆகவே BD-ன் சமன்பாடு $(x + 3y - 10) + 1.\,(3x - y - 5) = 0$

(அ-து) $4x + 2y - 15 = 0$

AC,BD இவற்றின் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் அவை வெட்டும் புள்ளி கிடைக்கும். அதன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ஆகும்.

பயிற்சிகள் 5

1. பின்வரும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி யாது ?

(1) $y = 3x + 4,\ 2x - 3y = 5.$

(2) $2x - 5y + 1 = 0,\ x + y + 4 = 0.$

(3) $5x + 7y - 12 = 0,\ 3x + 2y = 5.$

2. $2x - y + 7 = 0,\ 2x - y - 5 = 0,\ 3x + 2y - 5 = 0,\ 3x + 2y + 4 = 0.$ இக்கோடுகளால் அமைந்த ஒருபோகு நாற்சிறையின் மூலவரைகளின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

3. பின்வரும் கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லுமென நிறுவுக :

(1) $2x - 3y + 5 = 0,\ 3x + 4y - 7 = 0,\ 9x - 5y + 8 = 0.$

(2) $2x - 3y = 7,\ 4x + 5y = 3,\ 8x - 11y = 27.$

(3) $3x + 4y + 6 = 0,\ 6x + 5y + 9 = 0,\ 3x + 3y + 5 = 0.$

4. $3x + y + 2 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $x + ay - 3 = 0$ கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால் a-ன் மதிப்பு என்ன ?

5. $x - 6y + a = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$, $x + 4y + 1 = 0$ இக் கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால் a-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

6. $x + 2y = 9$, $3x - 5y = 5$, $ax + by = 1$ கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால் $5x + 2y = 1$ கோடு (a, b) வழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

7. கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணங்களின் பரப்பினைக் காண்க :

(1) $y - x = 0$, $y + x = 0$, $x - c = 0$.

(2) $y = 2x + 4$, $2y + 3x = 5$, $y + x + 1 = 0$.

(3) $x + y + 2 = 0$, $2x - y - 3 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$.

8. $2x = y + 2$, $x = 7y - 12$, $5x + 4y = 57$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் என்ன?

9. $4x - 6y + 7 = 0$-க்கு ஒருபோகாக $(4, 5)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

10. $3x - 2y + 7 = 0$ க்கு நேர்குத்தாக $(2, 3)$ வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

11. $(3, 2)$, $(-1, 3)$ புள்ளிகள்வழிச் செல்லும் கோட்டிற்கு இணையாக $(1, 2)$ வழிச் செல்லும்கோடு யாது ?

12. $(-5, 12)$, $(-2, -3,)$ $(9, -10)$, $(6, 5)$ புள்ளிகளால் அமைந்த படம் ஒருபோகு நாற்சிறை என நிறுவுக.

13. $8px + (2 - 3p)\ y + 1 = 0$, $px + 8y + 7 = 0$ கோடுகள் நேர்குத்தாக இருப்பின் p-ன் மதிப்பு என்ன ?

14. $(2, 3)$ புள்ளிவழி $x + 2y = 0$ கோட்டோடு $45°$ பிறப்பிக்குங் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் என்ன ?

15. $x - 4y - 7 = 0$, $2y + x - 1 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும் $(1, 2)$-ஐயும் இணைக்குங் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

16. $4x + 3y - 2 = 0$, $2y - x + 5 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி, $(1, 1)$ இவ் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

17. $x - 2y + 3 = 0$, $2x + 3y - 4 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழி $5x - 6y + 7 = 0$-க்கு நேர்குத்தான கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

18. $x - 2y - 2 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழி $3x + 4y + 5 = 0$ க்கு ஒருபோகான கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

19. $2x - 3y = 1$, $x + y = 3$ கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி வழி x ஆயத்தோடு கூடி $45°$ பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன் பாட்டினைக் காண்க:

20. கீழ்வரும் கோடுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட முக்கோணத் தின் செங்கோட்டு மையத்தினைக் காண்க.

(1) $x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$.
(2) $2x + y - 3 = 0$, $x - y = 0$, $x - 2 = 0$.
(3) $x - 2y + 5 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $7x + y - 10 = 0$.

21. கீழ்வரும் புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் என்ன ?

(1) $(1, -2)$, $(3, 1)$, $(-2, 3)$
(2) $(1, 1)$, $(2, -2)$, $(-1, 0)$.
(3) $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 7)$.

22. கீழ்வரும் புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டமையம் யாது ?

(1) $(2, 4)$, $(-2, 0)$, $(4, -2)$.
(2) $(-4, 3)$, $(2, 0)$, $(-5, 7)$.

23. ஒருபோகுநாற்சிறையின் இரு பக்கங்கள் $4x + 5y = 0$, $7x + 2y = 0$, மூலவரை $11x + 7y = 9$ எனின், ஏனைய இரு பக்கங்களையும், மூலவரையையும் காண்க.

24. இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் அடிப்பாக முனைகள் $(2a, 0)$, $(0, a)$, ஒரு பக்கம் $x = 2a$ எனின், எஞ்சிய பக்கத்தினையும் முக்கோணத்தின் பரப்பினையும் காண்க.

25. ஒரு சதுரத்தின் எதிர்முனைகள் $(3, 4)$, $(1, -1)$ எனின், சதுரத்தின் பக்கங்கள் யாவை ?

26. ஒரு நீள் சதுரத்தின் முனைகள் $(-3, 1)$, $(1, 1)$; $(-3, 1)$ வழிச் செல்லும் அதன் பக்கம் $3x + 7y + 2 = 0$ எனின் ஏனைய பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

27. ஒரு சதுரத்தின் பக்கம் 4, மையம் (3, 7), ஒரு மூலவரை $y=x$ கோட்டிற்கு இணையான கோடு எனின், சதுரத்தின் முனைகளைக் காண்க.

28. ஒரு சதுரத்தின் மூலவரைகளில் ஒன்றின் சமன்பாடு $8x-15y=0$, ஒரு முனை (1, 2) எனின் இம் முனைவழிச் செல்லும் சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

29, $u\equiv 2x+y-3=0,\ v\equiv x-y=0,\ w\equiv x-2=0$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தில் $u+Kv=0$ கோடு (1) செங்கோட்டு மையவழிச் சென்றால் $K=-2$ என்றும், (2) நடுக்கோட்டு மையவழிச் சென்றால் $K=-1$ என்றும் நிறுவுக.

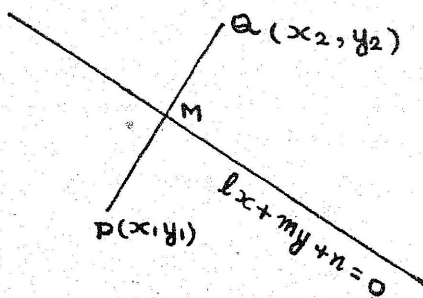
30. t மாறும் இராசியாக இருந்தால் $\frac{xt}{a}-\frac{y}{b}+t=0$, $\frac{x}{a}+\frac{ty}{b}-1=0$ கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையினைக் காண்க.

31. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ கோடு, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ நிலையெண்ணாக இயங்குமாயின், அது ஒரு நிலைப்புள்ளிவழி எப்போதும் செல்லுமென நிறுவுக.

32. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு முனை (2, 1) ; அதன் எதிர்பக்கம் $x-\sqrt{3}y+4=0$ எனின், ஏனைய பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

மாதிரி 22

$lx+my+n=0$ கோட்டில் (x_1, y_1)-யின் நிழலுரு (x_2, y_2) எனின் $\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=-\frac{2(lx_1+my_1+n)}{l^2+m^2}$ என்று நிறுவுக.



படம்-26

(x_1, y_1) புள்ளி P என்றும், $lx + my + n = 0$ கோட்டில் அதன் நிழலுரு Q (x_2, y_2) என்றும் கொள்வோம்.

$\therefore$ $lx+my+n=0$, PQ-ன் நேர்குத்துச் சமவெட்டியாகும். PQ, $lx + my + n = 0$-க்கு நேர்குத்தாதலின் அதன் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{m}{l}(x - x_1)$$

(அ-து) $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m}$.

இக் கோட்டில் (x_2, y_2) இருத்தலின் $\dfrac{x_2 - x_1}{l} = \dfrac{y_2 - y_1}{m}$

ஒவ்வொரு தகவையும் k எனக் கொண்டால்

$$x_2 = x_1 + lk \; ; \; y_2 = y_1 + mk.$$

M-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

(அ-து) $\left(\dfrac{2x_1 + lk}{2}, \dfrac{2y_1 + mk}{2}\right)$. இப் புள்ளி $lx+my+n=0$-ல்

இருத்தலின் $\dfrac{l(2x_1 + lk)}{2} + \dfrac{m(2y_1 + mk)}{2} + n = 0.$

$$\therefore \quad K = -\frac{2(lx_1 + my_1 + n)}{l^2 + m^2}$$

$$\therefore \quad \frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = -\frac{2(lx_1 + my_1 + n)}{l^2 + m^2}.$$

பயிற்சிகள் 6

1. $2x-3y+1=0$ கோட்டில் (2, 1) புள்ளியின் நிழலுருவத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

2. AB-ன் நேர்குத்துச் சமவெட்டியின் சமன்பாடு $2x - 3y - 4 = 0$, A-ன் ஆயத்தொலைகள் (5, 6) எனின், B-ன் ஆயத்தொலைகள் யாவை?

3. (x_1, y_1)-லிருந்து $lx + my + n + 0$ கோட்டிற்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் அடி (h, k) எனின்

$$\frac{h - x_1}{l} = \frac{k - y_1}{m} = -\frac{lx_1 + my_1 + n}{l^2 + m^2}$$ என நிறுவுக.

4. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடு $ax+by+c=0$ கோட்டின் நேர்குத்துச் சமவெட்டியானால் x_2, y_2-யை a, b, c, x_1, y_1 மூலமாகக் காண்க.

P_2, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ கோட்டில் இருந்தால் P_1,

$$2(aa_1 + bb_1)(ax+by+c) - (a^2+b^2)(a_1x+b_1y+c_1) = 0$$

கோட்டில் இருக்குமென நிறுவுக.

5. $x + y - 4 = 0$, $x + 5y - 26 = 0$, $15x - 27y - 424 = 0$ கோடுகளுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் ஒரே கோட்டில் உள என நிறுவுக. அக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

6. A $(0, l)$, B $(m, 0)$, C $(n, 0)$ ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளாயின், ஆதியிலிருந்து AB, AC-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் அடிகளும், B, C புள்ளிகளிலிருந்து எதிர்ப் பக்கங்களுக்கு வரையும் செங்கோடுகளின் அடிகளும்

$x\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + \frac{y}{l} - \frac{ly}{mn} = 1$ கோட்டில் உள என நிறுவுக.

7. $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$, y ஆயம் இவற்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}\ \frac{(c_1 - c_2)^2}{m_2 - m_1}$ என நிறுவுக.

8. $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$, $y = m_3x + c_3$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு

$\frac{1}{2}\ \frac{(c_2 - c_3)^2}{m_2 - m_3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(c_3 - c_1)^2}{m_3 - m_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(c_1 - c_2)^2}{m_1 - m_2}$ என நிறுவுக.

9. PQRS இணைகரத்தின் பக்கங்களின் நிலைத்த போக்குடையனவாக Q, S, P புள்ளிகள் முறையே $x = a$, $x = -a$, $y = 0$ கோடுகளில் இருந்தால், R-ன் இயங்குவரை ஒரு கோடென நிறுவுக.

10. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணம், $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ கோட்டினைச் செங்கோண எதிர்சிறையாகக் கொண்ட இரு சரிச் சிறை முக்கோணமாவதற்குரிய கட்டுப்பாடுகள் யாவை?

11. m-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்

$x(5m + 1) + y(m - 3) + 2 - 3m = 0$ கோடு இரு நிலைக் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும் என நிறுவுக. அந் நிலைக் கோடுகளையும், அவை வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

12. $x + ly = l^2$, $x + my = m^2$, $x + ny = n^2$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் யாது?

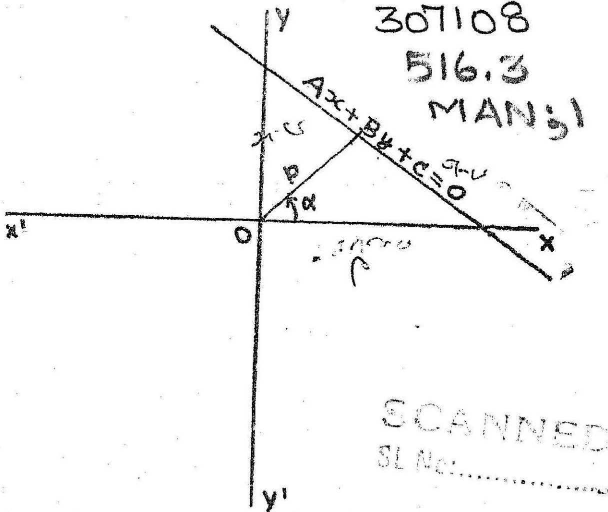
13. $ax + by + c = 0,\ lx + my + n + 0,\ px + qy + r = 0$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்துச் செங்கோட்டு மையத்தின் வழி

$$\frac{ax + by + c}{ap + bq} = \frac{lx + my + n}{lp + mq}$$ கோடு செல்லுமென நிறுவுக.

14. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $u_r \equiv x \cos \alpha_r + y \sin \alpha_r - p_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3)$ எனின் அதன் செங்கோட்டு மைய ஆயத்தொலைகள் $u_1 \cos (a_2 - a_3) = u_2 \cos (a_3 - a_1) = u_3 \cos (a_1 - a_2)$ சமன்பாடுகளால் காணலாம் என நிறுவுக.

15. $ax + by + c = 0,\quad ax + by + c_1 + 0,\quad a_1x + b_1y + c = 0;\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ கோடுகளால் அமைந்த நாற்சிறை சாய்வு சதுரமாயின் (Rhombus) $a^2 + b^2 + a_1^2 + b_1^2$ என நிறுவுக.

15. ஆதியிலிருந்து $Ax + By + C = 0$ கோட்டினுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம்.



படம்-27

ஆதியிலிருந்து $Ax + By + C = 0$-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு x ஆயத்தோடு கூடிக் கோணம் α-ஐப் பிறப்பிப்பின். அதன் சமன்பாடு

$$x \cos \alpha + \sin \alpha - p = 0$$

இரு சமன்பாடுகளையும் ஒப்பிடின்

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = -\frac{p}{C}$$ என்று வரும்.

ஒவ்வொரு தகவையும் K என்று கொண்டால்

$\cos\alpha = KA,\ \sin\alpha = KB,\ p = -KC$

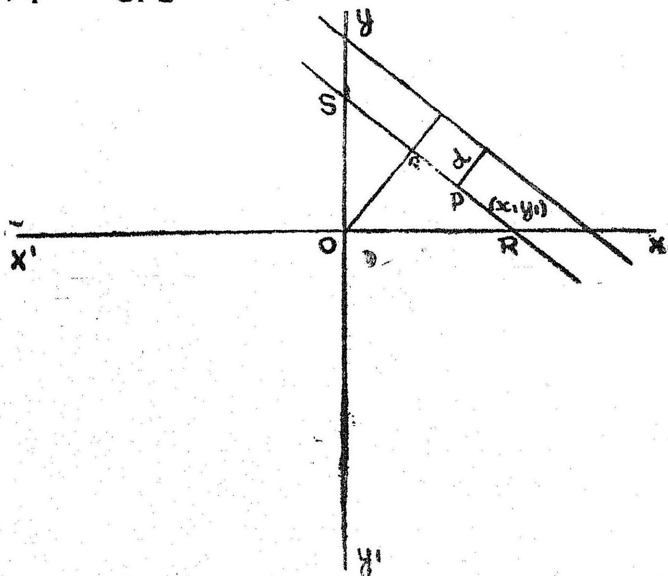
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \therefore K^2(A^2 + B^2) = 1$

எனவே $K = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$\therefore \cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ p = \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ஆகவே, நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$-ன் எண் மதிப்பாகும்.

16. $Ax + By + C = 0$ கோட்டினுக்கு (x_1, y_1)-லிருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம்.



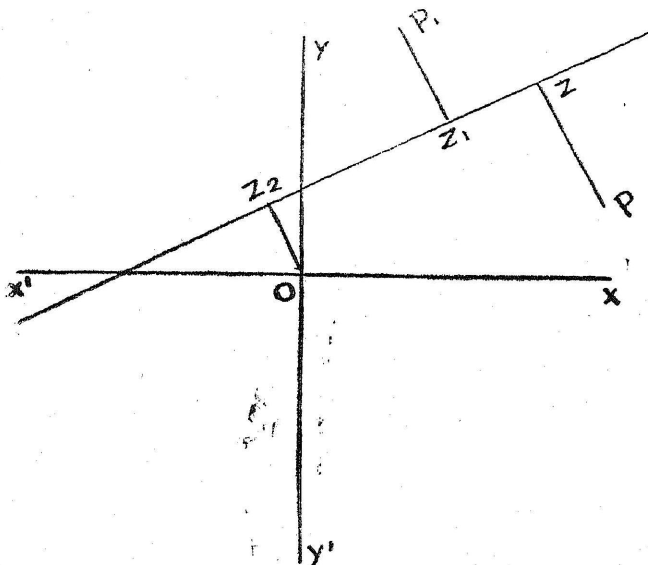
படம் - 28

இக் கோட்டினை $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ என்ற வகைக்கு மாற்றின் $\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$,

$p = \pm \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. (x_1, y_1) புள்ளியை P என்று கொள்வோம். இக் கோட்டுக்கு ஒருபோகாக RS வரைக. ஆதியிலிருந்து இக் கோட்டின் தொலை p_1 எனின், இதன் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p_1$. $(x_1\ y_1)$ இக் கோட்டில் இருத்தலின் $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p_1$. $(x_1\ y_1)$ லிருந்து $Ax + By + C = 0$-க்கு வரையும் நேர் குத்துக் கோட்டின் நீளம் d என்று கொண்டால்,

$$\begin{aligned} d &= p - p_1 \\ &= p - x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ &= \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \pm \frac{x_1 A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \pm \frac{y_1 B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

17. நேர்குத்துக் கோட்டின் குறி ஆதியிலிருந்தும் (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்தும் ஒரு கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகள் ஒரே போக்குடையனவாக இருந்தால், பின்னது மிகை

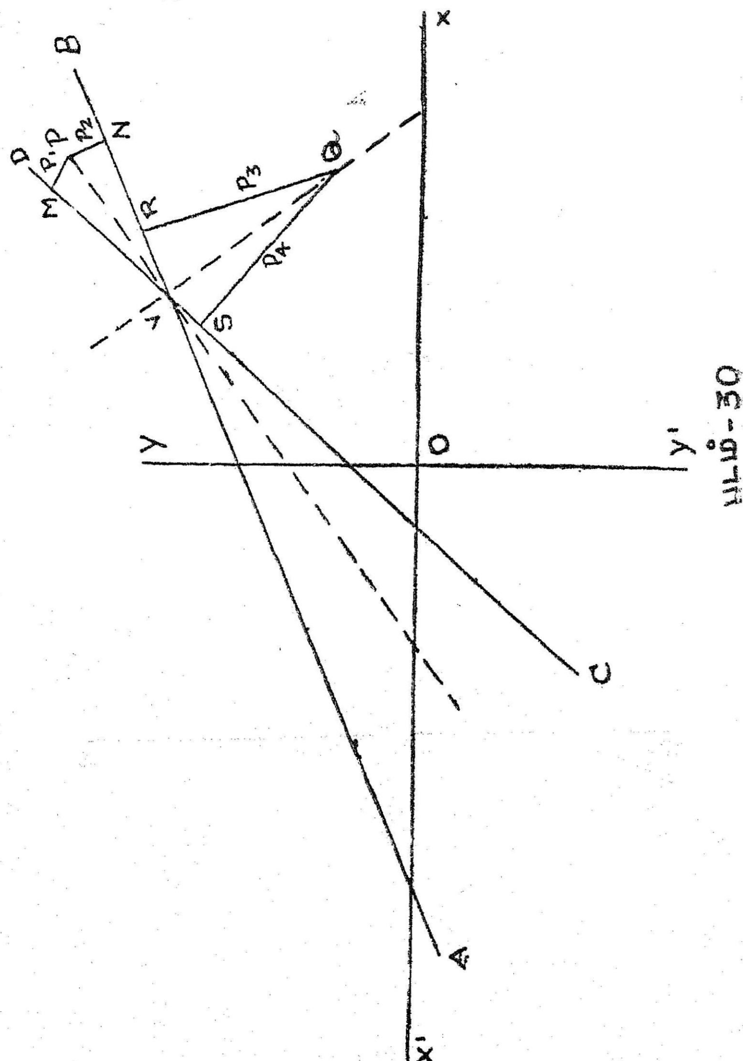


படம்-29

யாகவும், வேறுபட்ட போக்குடையனவாக இருந்தால், அது குறையாகவும் கருதப்படும்.

இப் படத்தில் PZ-ன் குறி மிகையாகும். $P_1 Z_1$-ன் குறி குறை யாகும்.

18. குறித்த இரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணங் களின் சமவெட்டிகள்.



படம் - 30

AB, CD கோடுகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்று கொள்வோம். DVB கோணத்தின்

சமவெட்டியில் இருக்கும் P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) என்றும், P-லிருந்து கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகள் p_1, p_2 என்றும் கொள்க.

இங்கு $p_1 = -p_2$

$$\therefore \quad \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

BVC கோணத்தின் சமவெட்டியிலிருக்கும் Q புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) என்றும் Q-லிருந்து கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் p_3, p_4 என்றும் கொள்க.

$$p_3 = p_4$$

$$\therefore \quad \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளி சமவெட்டிகளில் ஏதாவது ஒன்றில் இருந்தால்

$$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$\therefore$ சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

மிகை மதிப்பு எடுத்தால் ஒரு சமவெட்டியும், குறை மதிப்புக் கொண்டால் மற்றைய சமவெட்டியும் வரும்.

மாதிரி 23

$4x - 3y + 20 = 0$ கோட்டிலிருந்து தொலை 5-க்கு அப்பால் $y = x + 1$-ல் இருக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

அத்தகைய புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்க. இப் புள்ளி $y = x + 1$ கோட்டில் இருப்பதால்

$$y_1 = x_1 + 1 \qquad \ldots (1)$$

(x_1, y_1) லிருந்து $4x - 3y + 20 = 0$ க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= \pm \dfrac{4x_1 - 3y_1 + 20}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$. இந்த நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= 5$.

$$\therefore \quad \pm \frac{4x_1 - 3y_1 + 20}{5} = 5$$

(அ-து) $\pm (4x_1 - 3y_1 + 20) = 25.$

(அ-து) $4x_1 - 3y_1 = 5.$ ... (2)

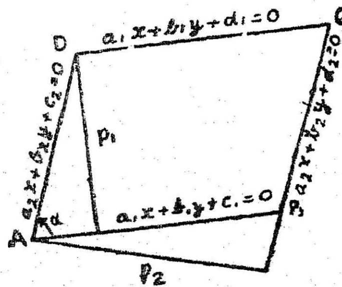
அல்லது $4x_1 - 3y_1 = -45.$ ... (3)

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $x_1 = 8$, $y_1 = 9$ என்றும் ; (1), (3) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $x_1 = -42$, $y_1 = -41$ என்றும் வரும்.

∴ வேண்டிய புள்ளிகளின் ஆயத்தொலேகள் (8, 9), (— 42, — 41).

மாதிரி 24

இணைகரம் ஒன்றின் கோணம் α, செங்கோடுகள் (altitudes) p_1, p_2 எனின், அதன் பரப்பு $\frac{p_1 p_2}{\sin \alpha}$ என நிறுவுக. இதனைப் பயன்படுத்தி $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1x + b_1y + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2x + b_2y + d_2 = 0$ கோடுகளால் அமைந்த இணைகரத்தின் பரப்பு $\frac{(d_1 - c_1)(d_2 - c_2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$ என நிறுவுக.



ABCD இணைகரத்தின் பரப்பு AB × p_1

$$AB \sin \alpha = p_2 \quad \therefore AB = \frac{p_2}{\sin \alpha}.$$

$$\therefore \text{ இணைகரத்தின் பரப்பு} = \frac{p_1 \cdot p_2}{\sin \alpha}.$$

$a_1x + b_1y + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் D-ன் ஆயத்தொலைகளைக் காணலாம்.

D-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{b_1c_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2d_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

$$\therefore \quad p_1 = \frac{a_1 \frac{b_1c_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_1 \frac{a_2d_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

$$= \frac{a_1(b_1c_2 - b_2d_1) + b_1(a_2d_1 - a_1c_2) + c_1(a_1b_2 - a_2b_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

$$= \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)(c_1 - d_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)a\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

$$= \frac{c_1 - d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

இம்மாதிரியே $p_2 = \frac{c_2 - d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

$a_2x + b_2y + c_2 = 0,\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் α

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}}{1 + \frac{a_1a_2}{b_1b_2}}$$

$$= \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2$$

$$= \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1a_2 + b_1b_2)^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

$$= \frac{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,.\,\sqrt{a_2^2 + b_2^3}}$$

இணைகரத்தின் பரப்பு $= \dfrac{p_1 p_2}{\sin \alpha}$

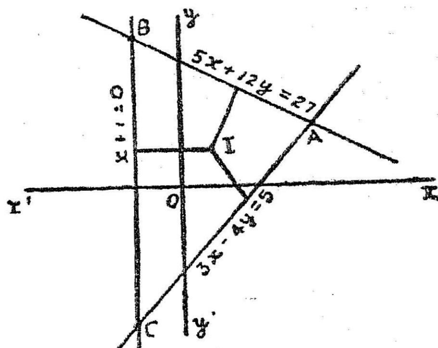
$$= \frac{(c_1 - d_1)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \frac{(c_2 - d_2)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$= \frac{(c_1 - d_1)(c_2 - d_2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

$$= \frac{(d_1 - c_1)(d_2 - c_2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

மாதிரி 25

$x + 1 = 0$, $3x - 4y = 5$, $5x + 12y = 27$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் உள் மையம் என்ன ?



படம் 32

முக்கோணம் வரையின், ஆதி முக்கோணத்தினுள் இருக்கிறது என்று காணலாம்.

I-ன் ஆயத்தொலைகளை x_1, y_1 என்று கொள்க. I-லிருந்து கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் $\pm (x_1 + 1)$, $\pm \dfrac{3x_1 - 4y_1 - 5}{5}$, $\pm \dfrac{5x_1 + 12y_1 - 27}{13}$

I, O புள்ளிகள் முக்கோணத்தின் உள் இருப்பதால், I-லிருந்து பக்கங்களுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளமெல்லாம் மிகையாகும்.

இந் நீளமெல்லாம் மிகையாவதற்குத் தகுந்த குறியை எடுத்தல் வேண்டும்.

I-யும், O-வும் BC-ன் ஒரே பக்கத்தில் உள.

I-லிருந்து BC-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு மிகையாகும்.

$\therefore$ O-விருந்து BC-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடும் மிகையாகும்.

$\therefore$ I-லிருந்து BC-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு $(x_1 + 1)$. ஏனெனின் இது O-விருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டை 1 ஆக்கும்.

I-யும், O-வும் AC-ன் ஒரே பக்கத்தில் உள. I-லிருந்து AC-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தை $-\frac{(3x_1 - 4y_1 - 5)}{5}$ ஆக எடுத்தால்தான் O-விருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோடு மிகையாகும்.

இம்மாதிரியே P-லிருந்து AB-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $-\frac{5x_1 + 12y_1 - 27}{13}$

$$\therefore \quad x_1 + 1 = -\frac{3x_1 - 4y_1 - 5}{5} = -\frac{5x_1 + 12y_1 - 27}{13}$$

சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் உள் மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

$$5x_1 + 5 = -3x_1 + 4y_1 + 5 \qquad ...(1)$$

$$13x_1 + 13 = -5x_1 - 12y_1 + 27 \qquad ...(2)$$

(அ-து) $8x_1 - 4y_1 = 0$

$$18x_1 + 12y_1 = 14$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{1}{3}, y_1 = \frac{2}{3}.$$

$\therefore$ உள் மையம் $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ஆகும்.

பயிற்சிகள் 7

1. ஆதியிலிருந்து $x \sec \theta + y \operatorname{cosec} \theta = a$, $x \cos \theta - y \sin \theta = a \cos 2\theta$ கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்க்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் p, p_1 எனின், $4p^2 + p_1^2 = a^2$ என நிறுவுக.

2. குறித்த இரு கோடுகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைகளது கூட்டுத்தொகை மாரு இராசியாயின், புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு கோடெனை நிறுவுக.

3. PL, PM கோடுகளின் சமன்பாடுகள் நிரலே $13x + 4y = 8$, $19x - 3y = 17$ எனின், P-யும், Q (5, 3) புள்ளியும் இணைக்கவரும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன? PQ கோட்டில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து PL, PM-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் $\sqrt{2} : 1$ விகிதத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

4. $3x + 4y = 7a$, $3x + 4y = 7b$, $4x + 3y = 7c$, $4x + 3y = 7d$ கோடுகளால் அமைந்த இணைகரத்தின் பரப்பு $7(a - b)(c - d)$ என நிறுவுக.

5. $4y - 3x - a = 0$, $3y - 4x + a = 0$, $4y - 3x - 3a = 0$ $4y - 3x + 2a = 0$ கோடுகளால் அமைந்த இணைகரத்தின் பரப்பு $\frac{2a^2}{7}$ என நிறுவுக.

6. $3x + 4y = 0$, $5x - 12y = 0$, $y = 15$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் உள் மையம் யாது?

7. $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் உள் மையம் யாது?

8. (2, 3), (— 2, — 5), (— 4, 6) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் உள் மையம் (— 1, 2) என நிறுவுக.

9. இரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தை $lx + my + n = 0$ கோடு சமபங்காகப் பிரிக்கும். இவ்விரு கோடுகளுள் ஒன்றன் சமன்பாடு $px + qy + r = 0$ எனின், ஏனையதன் சமன்பாடு $(px + qy + r)(l^2 + m^2) =$
$2(lp + mq)(lx + my + n)$ என நிறுவுக.

10. $4y + 3x - 12 = 0$, $3y + 4x - 24 = 0$ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் சமவெட்டிகள் யாவை?

11. $4x - 3y + 1 = 0$, $12x + 5y + 13 = 0$ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணங்களுள் ஆதியிருக்கும் கோணத்தின் சமவெட்டியின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

12. $x - y - 4 = 0$, $7x + y + 20 = 0$ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் சமவெட்டிகளில் ஒன்று ஆதிவழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

3. இரட்டைக் கோடுகள்

(Pairs of Straight lines)

1. முன் அதிகாரத்தில் $lx + my + n = 0$ ஒரு கோட்டினைக் குறிக்குமென நிறுவப்பட்டது.

$(lx + my + n)\ (l_1x + m_1y + n_1) = 0$ (1) சமன்பாட்டினைப் பார்ப்போம். $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகளில் உள்ள புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைத் தவிர, ஏனைய புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் இச்சமன்பாட்டில் பொருந்தா. ஆகவே, இச் சமன்பாடு $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகளைக் குறிக்கும். $(lx + my + n)$ $(l_1x + m_1y + n_1) = 0$ சமன்பாட்டினை விரித்தெழுதினால் $ll_1x^2 + (lm_1 + l_1m)xy + mm_1y^2 + (ln_1 + l_1n)x + (mn_1 + m_1n)y + nn_1 = 0$ என்று வரும்.

$$ll = a,\ lm_1 + l_1m = 2h$$
$$mm_1 = b,\ ln_1 + l_1n = 2g$$
$$nn_1 = c,\ mn_1 + m_1n = 2f$$ எனின்

இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆகும் ஆகவே, இரட்டைக் கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு x, y அடங்கிய இருபடிச் சமன்பாடாகும். $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்றாற் போன்ற ஒரு பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு (General Equation of the Second Degree) இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்க அச் சமன்பாடு $lx + my + n$, $l_1x + m_1y + n_1$ என்றாற் போன்ற ஒருபடிச்சினைகள் (Linear Factors) இரண்டின் பெருக்குத் தொகையாகும்.

2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இருபடிச் சமபடித்தான சமன்பாடு (Homogeneous Equation of the Second Degree) ஆதி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = b\left\{y^2 + + \frac{2h}{b}xy + \frac{a}{b}x^2\right\}.$$

இங்கு $m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, m_1 m_2 = \frac{a}{b}$ என்று கொண்டால்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = b(y^2 - \overline{m_1 + m_2}\,xy + m_1m_2x^2)$$
$$= b(y - m_1x)(y - m_2x)$$

$\therefore$ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ சமன்பாடு $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ என்ற இரு கோடுகளைக் குறிக்கும். இவ்விருகோடுகளும் ஆதிவழிச் செல்லுமாகையால் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ சமன்பாடு ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b},\ m_1m_2 = \frac{a}{b}.$$

$$\therefore\ m_1 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b},\ m_2 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

$h^2 \geq ab$ என்று இருந்தால்தான் m_1, m_2 என்பனவற்றிற்கு மெய் மதிப்புகள் வரும். இந் நிலையில் $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ மெய்க் கோடுகளாகும். $h^2 < ab$ என்றிருந்தால் $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ கற்பனைக் கோடுகள். ஆனால், இவை $(0, 0)$ மெய்ப் புள்ளியில் வெட்டும்.

3. ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித் தனிச் சமன்பாடு $lx + my = 0$, $l_1x + m_1y = 0$ ஆகும். இவ்விரட்டைக் கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு $(lx+my)(l_1x+m_1y) = 0$. (அ-து) $ll_1x^2 + (lm_1 + l_1m)xy + mm_1y^2 = 0$

இதனால், $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இருபடிச் சமன்பாடு ஆதிவழிச் செல்லும் இரு கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடாக இருக்க x-ன் கெழு $g = 0$, y-ன் கெழு $f=0$ எண்ணுறுப்பு $c = 0$ என்று இருத்தல் வேண்டும்.

4. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடாக இருந்தால்

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

இச் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடும் என்றும். இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) என்றும் கொள்வோம். ஆயங்களின் போக்கினை (Direction) மாற்றாமல் ஆதியை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றுக.

(x, y) புள்ளியின் ஆயத்தொலை இம்மாற்றத்தால் (x, y) ஆக மாறின்

$$x = x + x_1, \ y + \ y_1.$$

புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்துக் கோடுகளின் சமன்பாடு $a(x + x_1)^2 + 2h\ (x+x_1)(y+y_1) + b\,(y+y_1)^2 + 2g\,(x+x_1) + 2f\,(y + y_1) + c = 0$ என்று வரும்.

(அ-து) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2\ (ax_1 + hy_1 + g)\,x + 2(hx_1+by_1+f)y + (ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1 + 2fy_1+c)=0.$

புதிய ஆதிவழி இக்கோடுகள் செல்வதால் x, y-ன் கெழுக்களும் எண்ணுறுப்பும் சுன்னமாக இருத்தல்வேண்டும்.

$$\therefore\ ax_1 + hy_1 + g = 0. \quad (1)$$

$$hx_1 + by_1 + f = 0. \quad (2)$$

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad (3)$$

ஆனல், $ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

$$= x_1\,(ax_1+hy_1 + g) + y_1\,(hx_1+by_1+f) + \ gx_1+fy_1+c.$$

$$\therefore\ gx_1 + fy_1 + c = 0$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின்

$$\frac{x_1}{hf - bg} = \frac{y_1}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2},\ y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

இம்மதிப்புக்களை (4)-ல் ஈடாக்கின்

$$g\,\frac{hf - bg}{ab - h^2} + f\,\frac{gh - af}{ab - h^2} + c - 0.$$

(அ-து) $g(hf - bg) + f(gh - af) + c(ab - h^2) = 0.$

(அ-து) $\underline{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.}$

பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடின் இக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2},\quad \frac{gh - af}{ab - h^2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $ab = h^2$ என்றிருந்தால் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் எண்ணிலியாகும். இந் நிலையில் கோடுகள் இணையானவையாகும்.

பிறிதொரு முறை

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (1) ஒருபடிச் சினை கள் இரண்டின் பெருக்கல் தொகையாக இருந்தால்இச் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என்று நிறுவினோம்.

இச் சமன்பாட்டை x-ன் இருபடிச் சமன்பாடாகக் கருதின் $ax^2 + 2x(hy + g) + (by^2 + 2fy + c) = 0$ என்று எழுதலாம்.

$$\therefore\ x = \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}}{a}$$

(1) இருபடிச் சினைகள் இரண்டின் பெருக்கல் தொகையாக இருக்க

$(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)$ இருபடித் தொகையாக இருத்தல் வேண்டும்.

இதனை $(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + g^2 - ac$ என்று எழுதலாம். இது ஓர் இருபடித் தொகையாக இருந்தால் $(gh - af)^2 = (h^2 - ab)(g^2 - ac)$

(அ-து) $a(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2) = 0.$

$a \neq 0$ என்றால் $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$

5. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறித்தால் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஆதிவழி இக் கோடுகளுக்கு இணையான கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ என்றால், $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = (lx + my + n)(l_1x + m_1y + n_1)$

$$\therefore ll_1 = a,\ mm_1 = b,\ lm_1 + l_1m = 2h.$$

ஆதிவழி $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகளுக்கு இணையான கோடுகளின் சமன்பாடு $lx + my = 0$, $l_1x + m_1y = 0$ ஆகும்.

இக்கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(lx + my)(l_1x + m_1y) = 0.$$

(அ-து) $ll_1x^2 + (lm_1 + l_1m)xy + mm_1y^2 = 0.$

(அ-து) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$

மாதிரி 1 :

$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x + 9y + K = 0$ சமன்பாடு K-ன் எம் மதிப்புக்கு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் ?

இச் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் கொள்க.

ஆதிவழி இக் கோடுகளுக்கு ஒரு போகான கோடுகளின் சமன்பாடு $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$.

(அ-து) $(2x - y)(x + 2y) = 0$.

ஆகவே, $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x + 9y + K = 0$ சமன்பாடு குறிக்கும் கோடுகள் $3x - y + A = 0$, $x + 2y + B = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x + 9y + K$$
$$\equiv (2x - y + A)(x + 2y + B)$$

x, y கெழுக்களையும், எண்ணுறுப்புகளையும் இருபுறத்தும் ஒப்பிடின்

$$A + 2B = 7 \qquad \text{...... (1)}$$
$$2A - B = 9 \qquad \text{...... (2)}$$
$$AB = K.$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $A = 5$, $B = 1$

$$\therefore \quad K = 5.$$

இச் சமன்பாடு குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு $2x - y + 5 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$.

மாதிரி 2 :

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளில் ஒன்றின் சாய்வு வீதம் மற்றொன்றின் சாய்வு வீதத்தின் இருமடங்காக இருப்பின் $8h^2 = ab$ என்று நிறுவுக.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = b(y - m_1x)(y - m_2x)$ என்றால்

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \quad m_1 m_2 = \frac{a}{b}.$$

$\therefore \quad ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள்

$$y - m_1x = 0, \qquad y - m_2x = 0.$$

இங்கு, $m_1 = + 2m_2$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad \therefore \quad 3m_2 = -\frac{2h}{b}.$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b} \qquad \therefore \quad 2m_2^2 = \frac{a}{b}.$$

$$\therefore \quad 2\left(-\frac{2h}{3b}\right)^2 = \frac{a}{b}.$$

(அ-து) $8h^2 = 9ab$.

மாதிரி 3 :

(x_1, y_1)-லிருந்து $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்கத் தொகை $\dfrac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$ என நிறுவுக.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ சமன்பாடு ஆதிவழிச் செல்லும் இரு கோட்டின் சமன்பாடாகும் என நிறுவினோம்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = b(y - m_1x)(y - m_2x)$ என்றால்

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \ m_1m_2 = \frac{a}{b}.$$

கோடுகள் $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$. $(x_1 y_1)$-லிருந்து இக் கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்கத் தொகை

$$= \frac{y_1 - m_1x_1}{\sqrt{1 + m_1^2}} \cdot \frac{y_1 - m_2x_1}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

$$= \frac{y_1^2 - (m_1 + m_2)x_1y_1 + m_1m_2x_1^2}{\sqrt{(1 + m_1^2)(1 + m_2^2)}}$$

$$= \frac{y_1^2 - (m_1 + m_2)x_1y_1 + m_1m_2x_1^2}{\sqrt{1 + m_1^2m_2^2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

$$= \frac{y_1^2 - (m_1 + m_2)x_1y_1 + m_1m_2x_1^2}{\sqrt{(m_1m_2 - 1)^2 + (m_1 + m_2)^2}}$$

$$= \frac{y_1^2 + \frac{2h}{b}x_1y_1 + \frac{a}{b}x_1^2}{\sqrt{\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + \left(-\frac{2h}{b}\right)^2}}.$$

$$= \frac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}.$$

மாதிரி 4 :

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆதியிலிருந்து சம தொலையிலிருக்கும் இரட்டைக் கோடுகளாயின்

$f^4 - g^4 = c\,(bf^2 - ag^2)$ என்று நிறுவுக.

அக் கோடுகள் $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ என்று கொள்வோம்.

$\therefore\ ll_1 = a,\ mm_1 = b,\ lm_1 + l_1m = 2h,\ ln_1 + l_1n = 2g,$ $mn_1 + m_1n = 2f,\ nn_1 = c.$

ஆதியிலிருந்து இக் கோடுகளுக்கு வரையும் தொலைகள்

$$\pm\frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}},\ \pm\frac{n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}}$$

$$\therefore\ \frac{n^2}{l^2 + m^2} = \frac{n_1^2}{l_1^2 + m_1^2}$$

(அ-து) $n^2\,(l_1^2 + m_1^2) = n_1^2\,(l^2 + m^2)$

(அ-து) $n^2l_1^2 - n_1^2l^2 = m^2n_1^2 - m_1^2n^2$

(அ-து) $(nl_1+n_1l)\,(nl_1-n_1l) = (mn_1+m_1n)(mn_1-m_1n)$

(அ-து) $2g\,(n\,l_1 - n_1l) = 2f\,(mn_1 - m_1n)$

(அ-து) $g^2\,(nl_1 - n_1l)^2 = f^2\,(mn_1 - m_1n)^2$

(அ-து) $g^2\,\{(nl_1 + n_1l)^2 - 4ll_1nn_1\}$
$= f^2\{(mn_1+m_1n)^2 - 4mm_1\,nn_1\}$

(அ-து) $g^2\,(4g^2 - 4ac) = f^2\,(4f^2 - 4bc)$

(அ-து) $g^4 - acg^2 = f^4 - bcf^2$

(அ-து) $f^4 - g^4 = c\,(bf^2 - ag^2)$.

மாதிரி 5 :

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு இரண்டு ஒரு போகான கோடுகளைக் குறித்தால் $h^2=ab$, $bg^2=af^2$ என்றும் அக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட தொலை $2\sqrt{\dfrac{g^2 - ac}{a\,(a+b)}}$ என்றும் நிறுவுக.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரு கோடுகளைக் குறித்தால் $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ (1) என்றும் அக் கோடுகள் ஒரு போகானவையாயின் $ab=h^2$ (2) என்றும் 4-ஆவது

பகுதியில் நிறுவினோம். ab-க்குப் பதில் h^2-ஐ (1)-ல் ஈடாக்கின் $ch^2 + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ என்று வரும்.

$$\therefore \quad af^2 + bg^2 = 2fgh.$$

$$(\text{அ-து}) \ (af^2 + bg^2)^2 = 4f^2g^2h^2.$$

$$= 4f^2g^2ab.$$

$$(\text{அ-து}) \ (af^2 - bg^2)^2 = 0.$$

$$\therefore \quad af^2 = bg^2.$$

பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு குறிக்கும் ஒரு போகான கோடுகள் $lx + my + n = 0$, $lx + my + n_1 = 0$ என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

$$= (lx + my + n)(lx + my + n_1)$$

$$\therefore \quad a = l^2, \ h = lm, \ b = m^2, \ 2g = l(n + n_1),$$

$$2f = m(n + n_1), \ c = nn_1.$$

ஆதியிலிருந்து இக் கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீள வேற்றுமைத் தொகை இக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட தொலையாகும்.

$$\therefore \quad \text{இடைப்பட்ட தொலை } d = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}} \sim \frac{n_1}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

$$\therefore \quad d^2 = \frac{(n - n_1)^2}{l^2 + m^2}$$

$$= \frac{(n + n_1)^2 - 4nn_1}{l^2 + m^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2g}{l}\right)^2 - 4c}{a + b}$$

$$= \frac{4\left(\frac{g^2}{a} - c\right)}{a + b} = \frac{4(g^2 - ac)}{a(a + b)}$$

$$\therefore \quad d = 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a + b)}}$$

மாதிரி 6 :

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $lx + my = 1$ கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}$ என நிறுவுக.

$lx + my = 1$ கோடு, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளை வெட்டும் புள்ளிகள் (x_1, y_1) (x_2, y_2) எனக் கொள்வோம். முக்கோணத்தின் ஒரு முனை ஆதியில் இருப்பதால் அதன் பரப்பு $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ ஆகும். (x_1, y_1) (x_2, y_2) புள்ளிகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளில் இருப்பதால் $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}$, $a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2h\frac{x}{y} + b = 0$ சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$$\therefore \quad \frac{x_2}{y_1} + \frac{x_1}{y_2} = -\frac{2h}{a}; \quad \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}\right)^2 = \frac{4h^2}{a^2} - \frac{4b}{a} = \frac{4(h^2 - ab)}{a^2}$$

$lx + my = 1$, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ சமன்பாடுகளில் x-ஐ நீக்கவரும் சமன்பாட்டால் y_1, y_2 ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$x = \frac{1 - my}{l}$$

$$\therefore \quad \frac{a(1 - my)^2}{l^2} + \frac{2hy(1 - my)}{l} + by^2 = 0$$

(அ-து) $y^2(am^2 - 2hlm + bl^2) + 2y(hl - am) + a = 0$

$$\therefore \quad y_1y_2 = \frac{a}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$

$$= \frac{1}{2} y_1y_2\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{am^2 - 2hlm + bl^2} \cdot \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hl + bl^2}$$

மாதிரி 7 :

$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் இரு கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாக இருந்தால் $a^2 + d^2 + bd + ac = 0$ என நிறுவுக.

$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = d(y - m_1x)(y - m_2x)(y - m_3x)$ எனக்கொண்டால், கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ $y - m_3x = 0$, $m_1m_2m_3 = -\frac{a}{d}$

எனக் காணலாம்.

இக் கோடுகளில் இரு கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாக இருக்கின்றன.

$$\therefore\ m_1m_2 = -1.$$

$$m_1m_2m_3 = -\frac{a}{d} \qquad \therefore\ m_3 = \frac{a}{d}.$$

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3 = dx^3\left(\frac{y}{x} - m_1\right)\left(\frac{y}{x} - m_2\right)\left(\frac{y}{x} - m_3\right)$$

$\frac{y}{x}$-க்குப் பதில் m_3-ஐ ஈடாக்கின் இருபுறமும் சுன்னமாகும்.

$$\therefore\ d(m_3)^3 + c(m_3)^2 + b(m_3) + a = 0.$$

$$(\text{அ-து})\quad d\left(\frac{a}{d}\right)^3 + c\left(\frac{a}{d}\right)^2 + b\left(\frac{a}{d}\right) + a = 0.$$

$$\frac{a^3}{d^2} + \frac{ca^2}{d^2} + \frac{ba}{d} + a = 0.$$

(அ-து) $a^3 + ca^2 + bad + ad^2 = 0.$

$a \neq 0$ எனின் $a^2 + ac + bd + d^2 = 0.$

பயிற்சிகள் 8

1. K-ன் எம் மதிப்புக்கு $12x^2+7xy+Ky^2+13x-y+3 = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடும்? வந்த மதிப்பை K-ன் மதிப்பாகக் கொண்டு கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

2. $2x^2 - xy - y^2 - 10x - 2y + \lambda = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறித்தால் λ-ன் மதிப்பையும், இக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ சமன்பாடு குறிப்பிடும் கோடுகள் y ஆயத்தில் வெட்டின் $2fgh - bg^2 - ch^2 = 0$ என்று நிறுவுக.

4. $x^2 + 5xy + 4y^2 + 3x + 2y + \lambda = 0$ சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடின் λ ன் மதிப்பு என்ன ?

5. $x^2 - y^2 + x - 3y - 2 = 0$ சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. இவை வெட்டும் புள்ளி யாது ?

6. $x^2 + 3xy + y^2 - 7x - 3y + 1 = 0$ இரட்டைக் கோடு களைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. $(1, 2)$ வழி இவற்றிற்கு ஒரு போகான கோடுகளின் சமன்பாடு என்ன ?

7. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 9y + 1 = 0$ ஒருபோகு கோடு இரண்டின் சமன்பாடு என நிறுவுக. இக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட தொலை என்ன ?

8. $x^2 + 2xy + y^2 - 8ax - 9a^2 = 0$ ஒரு போகான இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடும் என நிறுவுக. இக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட தொலை என்ன ?

9. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 3x - 3\sqrt{3}y - 4 = 0$ சமன்பாடு ஒருபோகு இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடும் என நிறுவுக. இக் கோடு களின் இடைப்பட்ட தொலை என்ன ?

10. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்கு ஆதி வழி நேர்குத்தாக வரையும் கோடுகளின் சமன்பாடு $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ என நிறுவுக.

11. (c, d)-லிருந்து $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் சமன்பாடு என்ன ?

12. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $x \cos A + y \sin A = p$ கோடு களால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம், p-ன் அனைத்து மதிப்புக்கும் $x(a \tan A - h) + y\ (h \tan A - b) = 0$ கோட்டில் இருக்கும் என நிறுவுக.

13. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $y = x + c$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\dfrac{c^2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b + 2h}$ என நிறுவுக.

14. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $a_1x^2 + 3h_1xy + b_1y^2 = 0$ குறிப்பிடும் கோடுகளுள் ஒன்று இரண்டிற்கும் பொதுவாக இருந்தால்

$4(ah_1 - a_1h)(hb_1 - h_1b) = (ab_1 - a_1b)^2$ என நிறுவுக.

15. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடின் இவை வெட்டும் புள்ளிக்கும் ஆதிக்கும் இடைப்பட்ட தொலையின் இருபடி $\dfrac{c(a+b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$ என நிறுவுக.

16. $12x^2 - 20xy + 7y^2 = 0$, $2x - 3y + 4 = 0$ கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்து நடுக்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

17. $12x^2 + 7xy - 12y^2 = 0$, $12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 = 0$ இந் நாற்கோடுகள் ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்கள் என நிறுவுக.

18. ஒரு போகுநாற்சிறையின் ஒரு மூலவரை $lx + my = 1$ கோடாகவும், இருபக்கங்கள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளாகவும் இருந்தால் அதன் மற்ற மூலவரை $y(bl - hm) = x(am - hl)$ என்று நிறுவுக.

19. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகள், (x_1, y_1) புள்ளி வழி இக் கோடுகளுக்கு வரையும் ஒரு போகு கோடுகள், இவற்றால் அமையும் ஒரு போகு நாற்சிறையின் ஆதிவழிச் செல்லாத மூலவரையின் சமன்பாடு $(2x - x_1)(ax_1 + hy_1) + (2y - y_1)(hx_1 + by_1) = 0$ எனவும், ஒரு போகு நாற்சிறையின் பரப்பு $\dfrac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{2\sqrt{h^2 - ab}}$ எனவும் நிறுவுக.

20. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளால் அமையும் ஒரு போகு நாற்சிறையின் பரப்பு $\dfrac{c}{2\sqrt{h^2 - ab}}$ என நிறுவுக.

21. $(ab - h^2)(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy) + af^2 + bg^2 - 2fgh = 0$ சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் எனவும், இக் கோடுகள், $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகள் இவற்றால் அமையும் நாற்சிறை ஒருசாய்வு சதுரமாயிருப்பின் (Rhombus) $(a - b)fg + h(f^2 - g^2) = 0$ எனவும் நிறுவுக.

22. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $lx + my = 1$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் (x_1, y_1) எனின் $\dfrac{x_1}{l} = \dfrac{y_1}{m} = \dfrac{a+b}{am^2 - 2hlm + bl^2}$ என நிறுவுக.

23. $y^3 - x^3 + 3xy(y - x) = 0$ சமன்பாடு தம்முள் சமச் சாய்வு உடைய முக்கோடுகளைக் குறிக்குமென நிறுவுக.

6 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ சமன்பாடு குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 \equiv b(y - m_1x)(y - m_2x)$ எனின் $m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$, $m_1 m_2 = \dfrac{a}{b}$.

கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ ஆகும்.

இக்கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனின்

$$\tan^2\theta = \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)^2$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}{(1 + m_1 m_2)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{4h^2}{b^4} - \dfrac{4a}{b}}{\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{4(h^2 - ab)}{(a+b)^2}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \pm\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}.$$

θ குறுங்கோணமாயின் $+$ குறியும், விரிகோணமாயின் $-$ குறியும் மேற்கொள்ளப்படும்.

குறிப்பு : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + 0$ சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பின்

$\tan\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$. இங்கு θ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணமாகும்.

7. $a + b = 0$ என்றால் $\cot \theta$-வின் மதிப்புச் சுன்னமாகும்.
$\therefore \quad \theta = 90°$.

ஆகவே ஒரு சமன்பாடு குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு x^2, y^2 இவற்றின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை சுன்னமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $x^2 - y^2 = 0$, $ax^2 + 2hxy - ay^2 = 0$ சமன்பாடுகள் தம்முள் நேர்குத்தான கோடுகளைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 8 :

$(lx + my)^2 - 3(mx - ly)^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள், $lx + my + n = 0$ கோடு இவற்றால் அமைந்த முக்கோணம் சமபக்கமுடையது என நிறுவுக.

கோடுகளின் சமன்பாடு

(1) $lx + my + n = 0$

(2) $(l + m\sqrt{3})x + (m - l\sqrt{3})y = 0$.

(3) $(l - m\sqrt{3})x + (m + l\sqrt{3})y = 0$

(1), (2) கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம்

$$= \pm \tan^{-1} \frac{l(m - l\sqrt{3}) - m(l + m\sqrt{3})}{l(l + m\sqrt{3}) + m(m - l\sqrt{3})}$$

$= \pm \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = 60°$. அல்லது $120°$.

$\therefore$ (1), (2) கோடுகளின் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் $= 60°$.

இம்மாதிரியே (1), (3) கோடுகளின் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் $= 60°$.

$\therefore$ முக்கோணத்தின் மூன்றாவது கோணம் $= 60°$. ஆகவே, முக்கோணம் சமபக்கமுடையதாகும்.

8. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிப்பிடும் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தைச் சமபங்காக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு
$ax^2 + 2hxy + by^2 = b\,(y - m_1x)\,(y - m_2x)$ எனின்
$m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$, $m_1 m_2 = \dfrac{a}{b}$.

இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு

$$y - m_1x = 0, \; y - m_2x = 0.$$

இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணத்துச் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகள்.

$$\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}; \quad \frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = - \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகளை ஒரே சமன்பாட்டில் எழுதினால், அது

$$\left\{\frac{y - m_1x}{\sqrt{1 + m_1^2}} - \frac{y - m_2x}{\sqrt{1 + m_2^2}}\right\} \left\{\frac{y - m_1x}{\sqrt{1 + m_1^2}} + \frac{y - m_2x}{\sqrt{1 + m_2^2}}\right\} = 0$$

ஆகும்.

(அ-து) $\frac{(y-m_1x)^2}{1 + m_1^2} - \frac{(y - m_2x)^2}{1 + m_2^2} = 0.$

(அ-து) $(1 + m_2^2)(y-m_1x)^2 - (1+m_1^2)(y+m_2x)^2=0.$

(அ-து) $(m_1^2-m_2^2)(x^2-y^2)+2(m_1m_2-1)(m_1-m_2)xy=0$

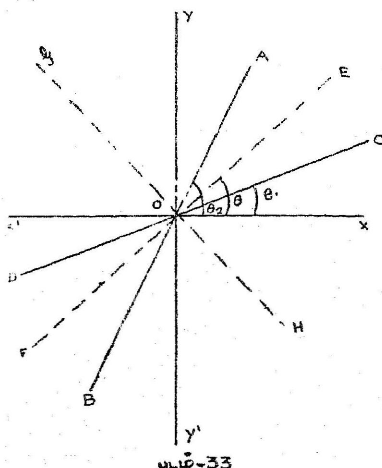
(அ-து) $(m_1 + m_2)(x^2 - y^2) + 2(m_1 m_2 - 1)xy = 0.$

$m_1 + m_2$, $m_1 m_2$-ன் மதிப்பை இங்கு ஈடாக்கின் சமவெட்டி களின் சமன்பாடு

$\frac{2h}{b}(x^2 - y^2) + 2\left(\frac{a}{b} - 1\right)xy = 0$ என்று வரும்.

(அ-து) $\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}.$

இரண்டாவது முறை—



படம்-33

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன் பாடு $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ எனின், $m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$, $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$.

இக் கோடுகள் x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் θ_1, θ_2 எனின், $m_1 = \tan\theta_1$, $m_2 = \tan\theta_2$ சமவெட்டிகள் x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ எனக் காணலாம். அவை ஆதிவழிச் செல்லுவதால் அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$y = x \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2};\ y = x\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

இங்கு $\theta_1 + \theta_2 = 2\theta$ எனின், சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$y - x\tan\theta = 0$, $y + x\cot\theta = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ சமவெட்டிகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(y - x\tan\theta)(y + x\cot\theta) = 0.$$

(அ-து) $y^2 - x^2 = xy(\tan\theta - \cot\theta)$

$$= xy\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= -2xy\,\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\therefore \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{2}{\tan 2\theta}.$$

$$\tan 2\theta = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$$

$$= \frac{\frac{-2h}{b}}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{2h}{a - b}.$$

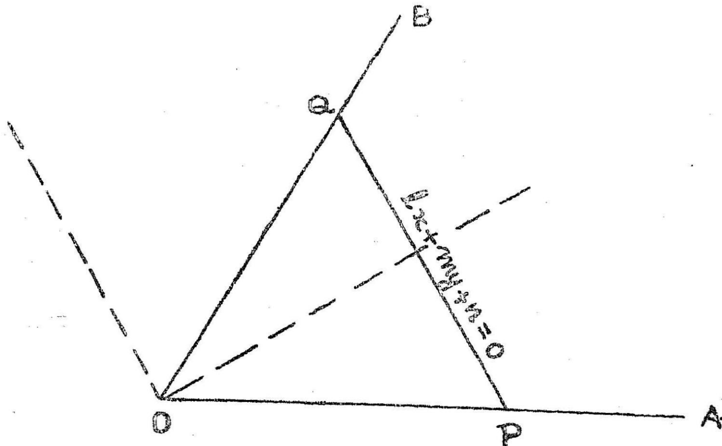
$\therefore$ சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு $\frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{a-b}{h}$

(அ-து) $\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}.$

மாதிரி 9 :

$(lx + my)^2 - 3(mx - ly)^2 = 0$ கோடுகள், $lx + my + n = 0$ கோடு இவற்றால் அமைந்த முக்கோணம் சமபக்கமுடையது என்றும் அதன் பரப்பு $\frac{n^2}{\sqrt{3}(l^2 + m^2)}$ என்றும் நிறுவுக.

(இவ்வதிகாரத்தில் மாதிரி 8-ஐப் பார்க்கவும்.)



படம்-34

$(lx+my)^2-3(mx-ly)^2=0$ கோடுகள் ஆதிவழிச் செல்லும். அக் கோடுகளை OA, OB என்று கொள்க. இவை $lx+my+n=0$ வோடு கூடி ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின், $A\hat{O}B=60°$ ஆகவும், AOB கோணத்தின் சமவெட்டிகளில் ஒன்று PQ-க்கு ஒருபோகாகவும், மற்றொன்று AB-க்கு நேர்குத்தாகவும் இருத்தல் வேண்டும். O வழி AB-க்கு நேர்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு $mx-ly=0$, AB-க்கு ஒருபோகான கோட்டின் சமன்பாடு $lx+my=0$.

$\therefore$ $A\hat{O}B=60°$ ஆகவும், $A\hat{O}B$-ன் சமவெட்டிகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு $(lx+my)(mx-ly)=0$ என்றிருப்பின் OPQ சமபக்க முக்கோணமாகும். OA, OB கோடுகளின் சமன்பாடு $(l^2-3m^2)x^2+8lm\,xy+(m^2-3l^2)y^2=0$ ஆகும்.

$$\tan A\hat{O}B=\pm\frac{2\sqrt{16\,l^2m^2-(l^2-3m^2)(m^2-3l^2)}}{(l^2-3m^2)+m^2-3l^2}$$

$$=\pm\frac{2\sqrt{3\cdot(l^2+m^2)^2}}{-2(l^2+m^2)}$$

$$=\pm\sqrt{3}.$$

$\therefore$ குறுங்கோணம் $A\hat{O}B=60°$

AOB கோணத்துச் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2-y^2}{(l^2-3m^2)-(m-3l^2)}=\frac{xy}{4lm}$$

(அ-து) $\frac{x^2 - y^2}{l^2 - m^2} = \frac{xy}{lm}$

(அ-து) $lmx^2 - lmy^2 = l^2xy - m^2xy$

(அ-து) $lmx^2 - l^2xy + m^2xy - lmy^2 = 0.$

(அ-து) $(lx + my)(mx - ly) = 0.$

$\therefore$ OPQ சமபக்க முக்கோணமாகும்.

O-லிருந்து PQ-க்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோட்டின்

$$\text{நீளம்} = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

$\therefore$ முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{n^2}{\sqrt{3}\,(l^2 + m^2)}$ என்று எளிதிற் காணலாம்.

மாதிரி 10 :

ஆதிவழி $lx + my + n = 0$ கோட்டோடு கூடி $45°$ பிறப்பிக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு

$(l^2 - m^2)(x^2 - y^2) + 4lm\, xy = 0$ என நிறுவுக.

படம் – 35

அத்தகைய கோடுகள் OA, OB என்றும், $lx + my + n = 0$ கோடு AB என்றும் கொள்க.

$O\hat{A}B = 45°$, $O\hat{B}A = 45°$ ஆகையால் $A\hat{O}B = 90°$.

∴ OA, OB-ன் சமன்பாட்டை $ax^2 + 2hxy - ay^2 = 0$ என்று கொள்ளலாம்.

$\hat{AOB}$-ன் சமவெட்டிகளில் ஒன்று AB-க்கு நேர்குத்தாகவும், மற்றொன்று AB-க்கு ஒருபோகாகவும் இருக்கும்.

∴ சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு $(lx + my)(mx - ly) = 0$.

$$\text{(அ-து)} \quad lm(x^2 - y^2) = (l^2 - m^2)xy.$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{x^2 - y^2}{l^2 - m^2} = \frac{xy}{lm} \quad \ldots\ldots (1)$$

$\hat{AOB}$-ன் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2 - y^2}{2a} = \frac{xy}{h} \quad \ldots\ldots (2)$$

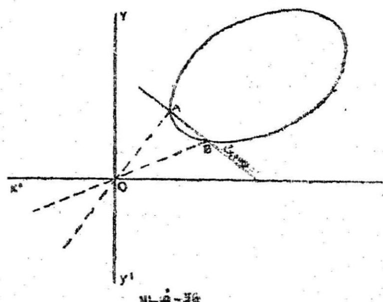
(1), (2) சமன்பாடுகளை ஒப்பிடின்

$2a = l^2 - m^2,\ h = lm.$

∴ OA, OB கோடுகளின் சமன்பாட்டில் இம் மதிப்புகளை ஈடாக்கின் அதன் சமன்பாடு

$(l^2 - m^2)(x^2 - y^2) + 4lm\,xy = 0$ ஆகும்.

9. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (1) சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடின் $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ எனக் கண்டோம். இக் கட்டுப்பாடு இல்லையெனின் (1) சமன்பாடு வட்டம், கூம்புவெட்டி (conic) போன்ற ஒரு வளைவரையைக் குறிக்கும்.



படம்-36

$lx + my = 1$ (2) கோடு இவ் வளைவரையை A, B புள்ளிகளில் வெட்டுமெனக் கொள்வோம்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ சமன்பாட்டினை $lx + my = 1$ சமன்பாட்டால் சமபடித்தான சமன்பாடாக்கினால், $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2(gx + fy)(lx + my) + c(lx + my)^2 = 0$ (3) என்று வரும். இது ஆதிவழிச் செல்லும் இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடும். மேலும் (1), (2) சமன்பாடுகளில் பொருந்தும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் (3)-லும் பொருந்தும்.

ஆகவே, (2) கோடு (1) வளைவரையை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்க வரும் கோடுகளை (3) குறிப்பிடும். ஆகவே, OA, OB கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு (3) ஆகும்.

கோட்டின் சமன்பாடு $lx + my + n = 0$ எனின், OA, OB கோடுகளின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2(gx + fy)\left(\frac{lx + my}{-n}\right) + c\left(\frac{lx + my}{-n}\right)^2 = 0$$

ஆகும்.

மாதிரி 11:

$y = mx + c$ கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்க வரும் கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாயின் $2c^2 = a^2(1 + m^2)$ என்று நிறுவுக.

$y = mx + c$ கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் A, B எனக் கொள்வோம். OA, OB சமன்பாடு காண $x^2 + y^2 = a^2$ சமன்பாட்டை $y = mx + c$ ஆல் சமபடித்தாக ஆக்கவேண்டும்.

OA, OB-ன் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{y - mx}{c}\right)^2$

(அ-து) $c^2(x^2 + y^2) = a^2(y - mx)^2$.

(அ-து) $(c^2 - a^2m^2)x^2 + 2a^2mxy + (c^2 - a^2)y^2 = 0$.
இக் கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாதல் வேண்டும்.

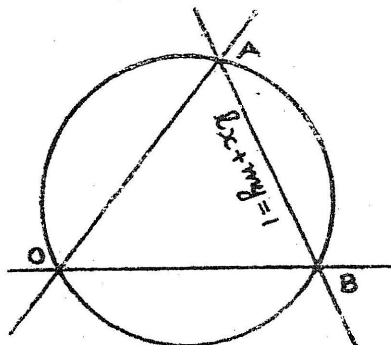
$\therefore$ x^2-ன் கெழு + y^2-ன் கெழு = 0.

$\therefore$ $c^2 - a^2m^2 + c^2 - a^2 = 0$.

(அ-து) $2c^2 = a^2(1 + m^2)$.

மாதிரி 12 :

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $lx+my=1$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தினைக் காண்க.



படம் - 37

OA, OB கோடுகளின் சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ எனவும் AB-ன் சமன்பாடு $lx + my = 1$ எனவும் கொள்க. இக் கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்துச் சுற்று வட்டம் ஆதிவழிச் செல்வதால். அதன் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ எனக் கொள்வோம்.

$lx+my = 1$ கோடு இவ் வட்டத்தை A,B புள்ளிகளில் வெட்டின், OA, OB கோடுகளின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + (2gx + 2fy)\cdot(lx + my) = 0.$$

(அ-து) $(1+2gl)\,x^2 + 2\,(mg + fl)xy + (1+2fm)\,y^2 = 0.$
இச் சமன்பாட்டினை $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஓடு ஒப்பிடின்

$$\frac{1 + 2gl}{a} = \frac{mg + gl}{h} = \frac{1 + 2fm}{b}$$

ஒவ்வொரு தகவையும் K எனக்கொள்வோம்.

$1 + 2gl = a\mathrm{K}$, $mg + fl = h\mathrm{K}$; $1 + 2fm = b\mathrm{K}$.

$\therefore\ 2g = \dfrac{a\mathrm{K} - 1}{l},\ 2f = \dfrac{b\mathrm{K} - 1}{m}.$

$$\frac{m(a\mathrm{K} - 1)}{2l} + \frac{(bK - 1)}{2m} = h\mathrm{K}.$$

$m^2\,(a\mathrm{K} - 1) + l^2\,(b\mathrm{K} - 1) = 2h\mathrm{K}lm$

(அ-து) $K(am^2 - 2hlm + bl^2) = l^2 + m^2$

$$\therefore K = \frac{l^2 + m^2}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

$$\therefore 2g = \frac{\dfrac{a(l^2 + m^2)}{am^2 - 2hlm + bl^2} - 1}{l};$$

$$2f = \frac{\dfrac{b(l^2 + m^2)}{am^2 - 2hlm + bl^2} - 1}{m}$$

(அ-து) $2g = \dfrac{al^2 + 2hlm - bl^2}{l(am^2 - 2hlm + bl^2)} + \dfrac{al + 2hm - bl}{am^2 - 2hlm + bl^2}$

இம்மாதிரியே

$$2f = \frac{am + 2hl - bm}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

$\therefore$ வட்டமையம்

$$\left\{ -\frac{(a-b)l + 2hm}{2(am^2 - 2hlm + bl^2)}, -\frac{(a-b)m + 2hl}{(2am^2 - 2hlm + bl^2)} \right\}$$

பயிற்சிகள் 6

1. $a^2x^2 + 2h(a+b)xy + b^2y^2 = 0$ கோடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளோடு சமச்சாய்வுடையதாக இருக்கும் என நிறுவுக.

2. $(a-b)(x^2 - y^2) + 4hxy = 0$ கோடுகள், $h(x^2 - y^2) = (a-b)xy$ கோடுகள் இவை தம்முள் ஒன்று மற்றொன்றின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் சமவெட்டிகளாகும் என நிறுவுக.

3. $6x^2 + xy - 12y^2 - 14x + 47y - 40 = 0$ $14x^2 + xy - 4y^2 - 30x + 15y = 0$ இவை ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும் கோடுகள் எனவும், முதற் சமன்பாட்டுக் கோடுகள் இரண்டாவதன் கோடுகளோடு சமச்சாய்வுடையன என்றும் நிறுவுக.

4. $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ கோடுகள் $x + y = 3$ கோடு இவற்றால் அமைந்த முக்கோணம் சமபக்கமுடையது என நிறுவுக.

5. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் ஆதியாகவும், ஒரு பக்கம் $x + y = 1$ கோடாகவும் இருப்பின் அதன் ஏனைய பக்கங்களின் சமன்பாடு என்ன ?

6. $ax^2 + 2xy + by^2 = 0, lx + my + n = 0$ கோடுகளால் அமையும் முக்கோணம் செங்கோண இரு சரிச்சிறை முக்கோணமாயிருப்பதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன ?

7. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ சமன்பாடு (x_1, y_1)-ல் வெட்டும் இரு கோடுகளைக் குறித்தால் இக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் சமவெட்டிகள்

$$\frac{(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2}{a - b} = \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{h}$$ என நிறுவுக.

இச் சமவெட்டிகள், x ஆயம் இவற்ருல் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{2h} \cdot \frac{ca - g^2}{ab - h^2}$ என நிறுவுக.

8. $(a + 2hm + bm^2)x^2 + 2\{(b-a)m - (m^2-1)h\}xy + (am^2 - 2hm + b) = 0$ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் m-ன் அனைத்து மதிப்புக்கும் மாருத்தன்மையது என நிறுவுக.

9. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ தம்முள் நேர்குத்தாகும் இரு கோடுகளைக் குறிப்பின் ஆதியிலிருந்து அவை வெட்டும் புள்ளியின் தொலையின் இருபடி $\frac{f^2 + g^2}{b^2 + h^2}$ என நிறுவுக.

10. $3x^2 + 5xy - 3y^2 + 2x + 3y = 0$, $3x - 2y = 1$ இவற்றின் பொதுப் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கவரும் கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாக உள என நிறுவுக.

11. $3x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$, $2x + 3y = K$ இவற்றின் பொதுப் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கவரும் கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பின், $6K^2 - 5K + 52 = 0$ என நிறுவுக.

12. $6x - y + 8 = 0$ கோடு $3x^2 + 4xy - 4y^2 - 11x + 2y + 6 = 0$ கோடுகளை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்க வரும் கோடுகள் ஆயங்களோடு சமச்சாய்வு உடையதாக இருக்குமென நிறுவுக.

13. $lx + my + n = 0$, $x^2 + y^2 + 2px + 2qy = 0$. இவை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு என்ன? இக் கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாவதற் குரிய கட்டுப்பாடு என்ன?

14. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தில், $lx + my = 1$ சமன் பாடு உடைய நாண் ஆதியிடத்து $45°$ பிறப்பிப்பின் $4 \{ a^2 (l^2 + m^2) - 1 \} = \{ a^2 (l^2 + m^2) - 2 \}^2$ என நிறுவுக.

15. $lx + my = 1$ கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தை P,Q-ல் வெட்டினால் $P\hat{O}Q = \cos^{-1} \dfrac{1}{a\sqrt{l^2 + m^2}}$ என நிறுவுக. இங்கு O ஆதியாகும்.

16. $3x - 5y = 2$ கோடு, $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x - 5y - 2 = 0$ கோடுகளை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு என்ன? இந்த நாற் கோடுகளால் அமையும் நாற்சிறை ஒருபோகு நாற்சிறை என நிறுவுக.

17. ஆதி, $2x^2 - 7xy + 3y^2 + 5x + 10y - 25 = 0$, இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி, இக்கோடுகளை $x+2y-5 = 0$ கோடு வெட்டும் புள்ளிகள் என்ற இந் நான்கும் ஒருபோகு நாற்சிறை ஒன்றின் முனைகளாகும் என நிறுவுக.

18. $y^2 = 4a(x + a)$ வளைவரையை $y - k = m(x + 2a)$ கோடு, A, B புள்ளிகளில் வெட்டின் AOB கோணத்தின் சம வெட்டிகளைக் காண்க. இங்கு O ஆதியாகும்.

19. $2l$ நீளமுடைய ஒரு கோட்டின் இரு முனைகள் தனித்தனி $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் இருப்பின், கோட்டின் நடுப்புள்ளியின் இயங்குவரை $(ax+hy)^2 + (hx+by)^2 + (ab - h^2)l^2 = 0$ என நிறுவுக.

20. $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ கோடுகளால் அமையும் முக்கோணம் சமபக்கமாயின் $\dfrac{a}{1 - 2\cos\alpha} = \dfrac{h}{2 \sin 2\alpha} = \dfrac{b}{1 + 2\cos 2\alpha}$ என நிறுவுக.

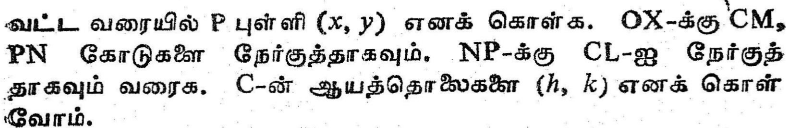
4. வட்டம்

(Circle)

(1) **வரையறை :** நிலைப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து மாருத தொலையுடைய ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை அந்நிலைப் புள்ளியை மையமாகவும், அந்த மாருத் தொலையை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டமாகும்.

(2) **வட்டத்தின் சமன்பாடு:** ஆயங்கள் OX, OY கோடுகள் வட்டத்தின் மையம் C, வட்ட ஆரை r ஆகக் கொள்க.

படம்-38



வட்ட வரையில் P புள்ளி (x, y) எனக் கொள்க. OX-க்கு CM, PN கோடுகளை நேர்குத்தாகவும். NP-க்கு CL-ஐ நேர்குத்தாகவும் வரைக. C-ன் ஆயத்தொலைகளை (h, k) எனக் கொள்வோம்.

$$CL = MN = ON - OM = x - h.$$
$$LP = NP - NL = NP - MC = y - k.$$

CLP முக்கோணத்தில் $CL^2 + LP^2 = CP^2$.
எனவே, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

குறிப்பு: வட்டத்தின் ஆரை a ஆகவும், மையம் ஆதியாகவும் இருப்பின் அதன் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகும்.

(3.) வட்டத்தின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ வட்டத்துச் சமன்பாட்டினை விரித்து எழுதவே $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ என்று வரும்

இங்கு $-2h$, $-2k$, $h^2 + k^2 - r^2$ இவற்றிற்குப் பதில் $2g$, $2f$, c-ஐ முறையே எழுதினால், வட்டத்தின் சமன்பாடாக $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வரும் இச் சமன்பாட்டில் (1) x^2, y^2 இவற்றின் கெழுக்கள் (Co-efficients) சமமாகும். (2) xy-ன் கெழு சுன்னம். ஆகவே, இருபடிப் பொதுப்படைச் சமன்பாடு (General Equation of the Second Degree) அஃதாவது $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ஒரு வட்டத்தைக் குறிப்பின் $a = b$, $h = 0$.

(4) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ சமன்பாடு g, f, c-ன் அனைத்து மதிப்பிற்கும் ஒரு வட்டத்தினைக் குறிக்கும்: இச்சமன்பாட்டினைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்: $x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 = g^2+f^2-c$. (அ—து) $(x+g)^2+(y+f)^2 = (\sqrt{g^2+f^2-c})^2$ இச் சமன்பாட்டை முற்பகுதிச் சமன்பாட்டோடு ஒப்பிடின் $h = -g$, $k = -f$, $r = \sqrt{g^2+f^2-c}$ ஆகவே, இச் சமன்பாடு $(-g, -f)$-ஐ மையமாகவும் $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தினைக் குறிக்கும்.

இங்கு $g^2 + f^2 > c$ என்றிருந்தால்தான் ஆரத்திற்கு மெய் மதிப்பு வரும். $g^2 + f^2 = c$ என இருப்பின் ஆரத்தின் மதிப்புச் சுன்னமாகும். அந் நிலையில் இவ் வட்டம் $(-g, -f)$ புள்ளியொடு ஒன்றுபடும். இதற்குப் புள்ளிவட்டம் (Point circle) என்று பெயர். $g^2+f^2 < c$ எனின், ஆரத்தின் மதிப்புக் கற்பனையாகும். அந் நிலையில் இது $(-g, -f)$ மையத்து மெய்ப் புள்ளியுடைய கற்பனை வட்டமாகும்.

ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் தம்முள் தொடர்பு இல்லாத g, f, c நிலையெண்கள் மூன்று உள. இவற்றிற்குத் தக்க மதிப்புகள் கொடுத்து எண்ணிய வட்டத்தை இச் சமன்பாடு குறிக்கச் செய்யலாம். இதனால் இது வட்டத்தின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

ஒரு வட்டம் வரைய மூன்று கட்டுப்பாடுகள் வேண்டும். ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் g, f, c அடங்கிய ஒரு சமன்பாடு தோன்றும். இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்து g, f, c காணலாம்.

மாதிரி 1:

$2x^2 + 2y^2 - 14x + 10y + 19 = 0$ வட்டத்தின் மையம், ஆரை இவற்றினைக் காண்க.

சமன்பாட்டினை 2ஆல் வகுத்தால்

$$x^2 + y^2 - 7x + 5y + \frac{19}{2} = 0.$$

(அ-து) $$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + \frac{25}{4} - \frac{19}{2}$$

$$= 3^2$$

$\therefore$ வட்டத்தின் மையம் $\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$; ஆரம் $= 3$.

மாதிரி 2:

$(1, 1), (3, 1), (1, 2)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்வோம். இப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைச் சமன்பாட்டில் ஈடாக்கின்

$$2 + 2g + 2f + c = 0.$$
$$10 + 6g + 2f + c = 0.$$
$$5 + 2g + 4f + c = 0.$$

இச் சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின் $g = -2, \quad f = -\frac{3}{2}, \quad c = 5$

ஆகவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0.$$

மாதிரி 3:

$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0, \quad x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$ வட்டங்கள் தொடுமென நிறுவுக.

இரு வட்டங்களின் ஆரங்களின் கூட்டுத் தொகை அல்லது வேற்றுமைத் தொகை மையங்கட்கிடைப்பட்ட தொலையாக இருப்பின், அவ் வட்டங்கள் தொடும்.

வட்டங்களின் மையங்கள் $(-1, 4)$, $(-5, 1)$.

வட்டங்களின் ஆரங்கள் 3, 2

மையங்களிடைப்பட்ட தொலை $= \sqrt{(-1, +5)^2 + (4-1)^2}$
$= 5.$

ஆரங்களின் கூட்டுத் தொகை = மையங்களிடைப்பட்ட தொலை.

∴ வட்டங்கள் வெளியில் தொடும்.

மாதிரி 4 :

$x + 2y = 0$, $x - 3y + 1 = 0$, $3x + y - 5 = 0$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டச் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

$$(x+2y)(x-3y+1) + A(x-3y+1)(3x+y-5)$$
$$+ B(3x+y-5)(x+2y) = 0$$

சமன்பாட்டினைப் பார்ப்போம்:

இச் சமன்பாட்டு வளைவரை, இக்கோடுகள் தம்முள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் என எளிதிற் காணலாம்.

இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தினைக் குறிப்பின்

x^2-ன் கெழு $=$ y^2-ன் கெழு

xy-ன் கெழு $= 0$.

$\therefore \quad 1 + 3A + 3B = -6 - 3A + 2B$

$-1 - 8A + 7B = 0.$

(அ-து) $6A + B = -7.$

$8A - 7B = -1$

இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $A = -1$, $B = -1$.

ஆகவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x+2y)(x-3y+1) - (x-3y+1)(3x+y-5)$$
$$-(3x+y-5)(x+2y) = 0.$$

(அ-து) $5x^2 + 5y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$

மாதிரி 5 :

(2, 3) புள்ளிவழிச் செல்லும் வட்டமொன்றின் ஆரம் 5 ஆக, மையம் x ஆயத்தில் இருப்பின் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

$(h, 0)$ மையமெனக் கொள்க.

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2 + y^2 = 25$.

வட்டம் (2, 3) வழிச் செல்வதால் $(2-h)^2 + 9 = 25$.

(அ-து) $h^2 - 4h - 12 = 0$.

(அ-து) $(h-6)(h+2) = 0$.

(அ-து) $h = 6$ அல்லது -2.

$\therefore$ வட்டங்களின் சமன்பாடு $(x - 6)^2 + y^2 = 25$;
$(x + 2)^2 + y^2 = 25$.

(அ-து) $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$.

மாதிரி 6:

(4, 3) புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டம் $5x - 12y - 10 = 0$ கோட்டினைத் தொட்டால், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

வட்டத்தின் ஆரை r எனக் கொள்வோம். வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = r^2$. (4, 3)-லிருந்து $5x - 12y - 10 = 0$-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் r

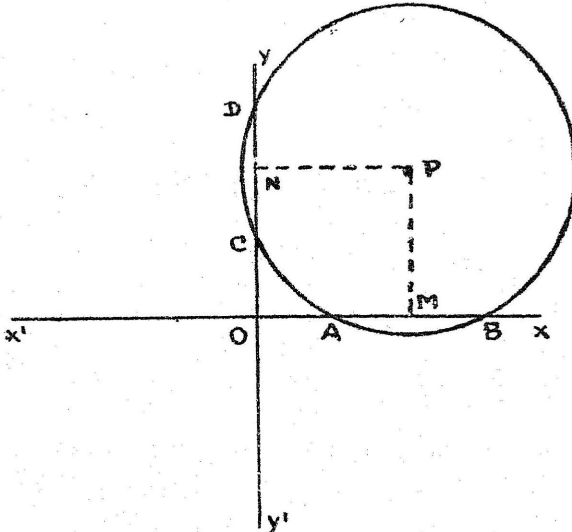
$$\therefore \; r = \pm \frac{20 - 36 - 10}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \pm 2.$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

(அ-து) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$.

மாதிரி 7:

a, *b* நீளமுடைய இரு கோல்கள் தம்முடைய நுனிகள் ஒரு வட்டத்தில் இருக்கும்படி ஆயங்களில் நகர்ந்தால், வட்ட மையத்தின் இயங்குவரை என்ன ?



படம்-39

AB, CD-ன் நீளம், a, b எனக் கொள்க.

A, B, C, D வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $P(x_1, y_1)$ எனக் கொள்க. P-லிருந்து ஆயங்களுக்கு PM, PN நேர்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

$$OA.\ OB = OC.\ OD.$$

(அ-து) $(OM - AM)(OM + MB) = (ON - CN)(ON + ND)$

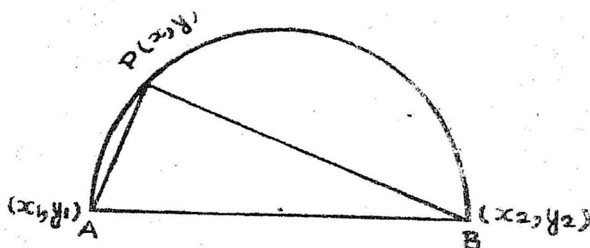
(அ-து) $\left(x_1 - \frac{a}{2}\right)\left(x_1 + \frac{a}{2}\right) = \left(y_1 - \frac{b}{2}\right)\left(y_1 + \frac{b}{2}\right)$

$\therefore\ x_1^2 - y_1^2 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$-ன் இயங்குவரை $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$.

5. (x_1, y_1), (x_2, y_2) **புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.**

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்றும் AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் P-ஐ (x, y) என்றும் கொள்வோம்.



படம்-40

APB அரை வட்டமாதலின் PA, PB கோடுகளிடைப்பட்ட கோணம் 90°.

ஆகவே, இவ்விரு கோட்டு 'm' களின் பெருக்கத் தொகை $= -1$.

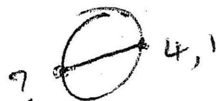
$$PA\text{-ன் } 'm' = \frac{y - y_1}{x - x_2}$$

$$PB\text{-ன் } 'm' = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

$$\therefore\ \frac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \frac{y - y_2}{x - x_2} = -1$$

$$\therefore\ (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

இது $A\hat{P}B = 90°$ ஆக இருக்க P-ன் இயங்குவரைச் சமன்பாடாகும். ஆகவே, இச் சமன்பாடு AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தினைக் குறிக்கும்.



மாதிரி 8:

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தினது முனைகளில் ஒன்று (4, 1) எனின், மற்ற முனையின் ஆயத்தொலைகள் யாவை?

விட்டத்தின் மற்ற முனையை (x_1, y_1) என்று கொண்டால் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x - 4)(x - x_1) + (y - 1)(y - y_1) = 0.$$

(அ-து) $x^2 + y^2 - x(4 + x_1) - y(1 + y_1) + 4x_1 + y_1 = 0$. இச் சமன்பாட்டினை வட்டச் சமன்பாட்டோடு ஒப்பிடின்

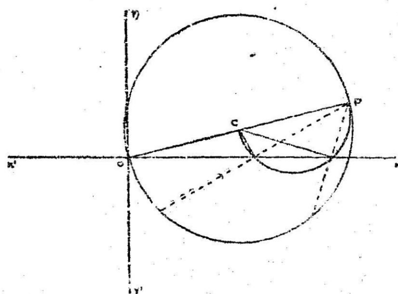
$$4 + x_1 = 2, \quad 1 + y_1 = -6, \quad 4x_1 + y_1 = -15$$

$\therefore \quad x_1 = -2, \quad y_1 = -7.$

$\therefore$ மற்ற முனை $(-2, -7)$ ஆகும்.

மாதிரி 9

$a^2 > 8b^2$ எனின் $x(x - a) + y(y - b) = 0$ வட்டத்தில் (a, b) வழி இரு நாண்களை x ஆயம் சமமாகப் பிரிக்குமென நிறுவுக.



படம்-41

வட்டத்தின் சமன்பாடு $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$

$\therefore$ மையம் $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ஆகும்.

OC-யின் நீட்சி வட்டத்தினை P (a, b)-ல் வெட்டும், P வழி இரு நாண்களை OX சமமாகப் பிரிக்கவேண்டுமெனின், CP-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் OX-ஐ இரண்டு மெய்ப் புள்ளிகளில் வெட்டவேண்டும்.

CP-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)(x - a) + \left(y - \frac{b}{2}\right)(y - b) = 0$$

இவ் வட்டம் OX-ஐ வெட்டும் புள்ளிகளிடத்து

$$y = 0$$

∴ இவ் வட்டம் OX-ஐ வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகளை,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)(x - a) + \left(-\frac{b}{2}\right)(-b) = 0$$ ஆல் காணலாம்.

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கு மெய்த்தீர்வுகள் இருத்தல் வேண்டும்.

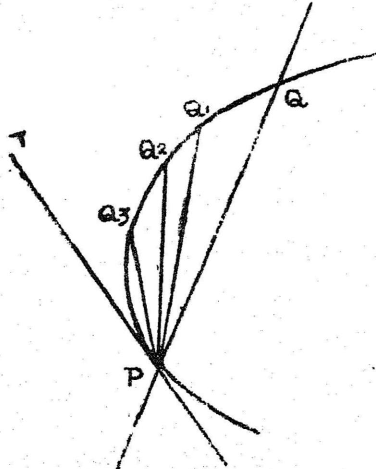
இச் சமன்பாட்டினை $x^2 - \frac{3a}{2}x + \frac{a^2 + b^2}{2} = 0$ என்று எழுதலாம்.

$$\therefore \frac{9a^2}{4} - 4\,\frac{a^2 + b^2}{2} > 0.$$

(அ-து) $a^2 - 8b^2 > 0$

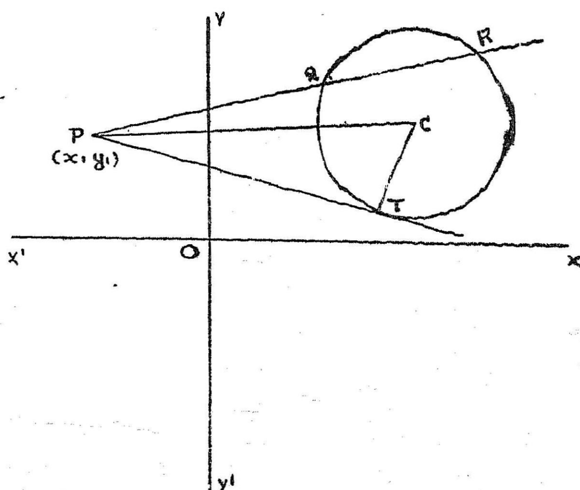
(அ-து) $a^2 > 8b^2$.

6. தொடுவரை (Tangent): தொடர்ந்த வளைவரையான $y = f(x)$-ல் P, Q நெருங்கிய புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம். P, நிலைப்புள்ளியாக P-ஐ Q நெருங்கி முடிவாக P ஓடு ஒன்றுபடின் PQ நாண் P இடத்து PT தொடுவரையாகும்.



படம்-42

(7.) P (x_1, y_1) வழி PQR கோடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்தை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டும்படி வரையின் PQ, PR-ன் பெருக்கத் தொகை கோட்டின் போக்கினை (Direction) பொறுத்ததன்று. அதின் மதிப்பு $x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c$ ஆகும்.



படம். 43

PQR கோடு x ஆயத்தோடு θ கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும் என்று கொண்டால் அதன் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r.$$

P-லிருந்து Q (அல்லது R)-ன் தொலை r ஆக இருப்பின் அதன் ஆயத்தொலைகள்

$$x_1+r\cos\theta,\ y_1+r\sin\theta$$

Q, R வட்டவரையில் இருப்பதால்

$$(x_1+r\cos\theta)^2+(y_1+r\sin\theta)^2+2g(x_1+r\cos\theta)$$
$$+2f(y_1+r\sin\theta)+c=0$$

இதனை r-ன் இருபடிச் சமன்பாடாக விரித்தெழுதினால்

$$r^2+2\{(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta\}\,or+x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1$$
$$+2fy_1+c=0$$

இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் PQ, PR ஆகும்.

$$\therefore\ PQ\cdot PR=x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c$$

P, வட்டத்தின் வெளியது என்றும் அதிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுவரை PT என்றும் கொண்டால்

$$PT^2 = PQ \cdot PR = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

தொடுவரை நீளத்தினைப் பின்வருமாறும் காணலாம்.

இவ் வட்டத்தின் மையம் C என்று கொள்ளின் அதன் ஆயத் தொலைகள் $(-g, -f)$; வட்டத்தின் ஆரை

$$CT = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$PT^2 = PC^2 - CT^2 \quad (\because \text{ PTC செங்கோணம்})$$

$$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

8. வட்டத்தின் வெளியே P இருப்பின் PT-க்கு மெய் மதிப்பு வரும். ஆகவே, PT^2-ன் மதிப்பு மிகையாகும்.

(அ-து) $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$.

வட்டத்தினுள் P இருப்பின் PT-க்குக் கற்பனை மதிப்புத்தான் உண்டு. ஆகவே, PT-ன் மதிப்புக் குறையாகும்.

(அ-து) $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$

வட்டவரையில் P இருப்பின் PT-ன் மதிப்புச் சுன்னமாகும்.

(அ-து) $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

எனவே, ஒரு புள்ளி $x^2 + y^2 + 2gx+2fy + c = 0$ வட்டத்தின் உள், வெளி, வட்டவரை என்ற இடங்களில் எங்கு இருக்கிறது என அறிய புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளை $x^2 + y^2 + 2gy + 2fy + c$-ல் ஈடாக்கல் வேண்டும். அவ்வாறு வரும் மதிப்பு குறையானுல் புள்ளியிருப்பது உள்ளிடமாம் ; மிகையானுல் வெளியிடமாம் ; சுன்னமானுல் வட்ட வரையாம். இதனுல் $x^2+y^2+2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தில் c குறை, மிகை, சுன்னமானுல் முறையே வட்டத்தின் உள், வெளி, வட்டவரையில் ஆதி இருக்குமென அறிக

9. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தில் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

முதல் முறை

$P(x_1 \ y_1)$ என்றும், அதற்கு மிக நெருங்கிய புள்ளி $Q(x_2, y_2)$ என்றும் கொள்க.

$$\therefore \text{ PQ-ன் சமன்பாடு } y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \dots (1)$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) வட்டவரையில் இருப்பதால்

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \dots (2)$$

$$x^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 \quad \dots (3)$$

(3)-ஐ (2)-லிருந்து கழித்தால்

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + 2g(x_1-x_2) + 2f(y_1-y_2) = 0.$$

(அ-து) $(x_1-x_2)(x_1+x_2+2g)+(y_1-y_2)(y_1+y_2+2f)=0.$

(அ-து) $$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}$$

இம் மதிப்பை (1)-ல் ஈடாக்கின் PQ-ன் சமன்பாடு $y-y_1=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}(x-x_1)$ என்று வரும் Q, P ஓடு நெருங்கி இறுதியில் அதனோடு ஒன்றுபடுவதால் $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ என்று கொண்டால் P இடத்துத் தொடுவரை கிடைக்கும்.

அதன் சமன்பாடு $y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$

(அ-து) $$\begin{aligned} y(y_1+f)+x(x_1+g) &= (y_1+f)+x_1+g \\ &= x_1^2+y_1^2+(gx_1+fy_1x_1) \\ &= -gx_1-fy_1-c, \{(2)\text{ஆல்}\} \end{aligned}$$

∴ P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

$x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தில் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$ ஆகும்.

குறிப்பு : வட்டத்துச் சமன்பாட்டில் $x^2, y^2, 2x, 2y$-க்குப் பதில் நிரலே $xx_1, yy_1, x+x_1, y+y_1$ ஈடாக்கின் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு வரும்.

இரண்டாவது முறை—

(x_1, y_1) வழி x ஆயத்தோடு θ கோணம் பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r \quad ...(1)$$

இக் கோட்டில் (x_1, y_1)-லிருந்து r தொலைக்கப்பால் உள்ள புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(x_1+r\cos\theta,\ y_1+\sin\theta)$ ஆகும்.

இப் புள்ளி வட்டவரையில் இருப்பின் $(x_1+r\cos\theta)^2+(y_1+r\sin\theta)^2+2g(x_1+r\cos\theta)+2f(y_1+r\sin\theta)+c=0.$

(அ-து) $r^2+2r\{(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta\}+x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0.$

(1), வட்டத்தின் தொடுவரையாயின், இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் இரண்டும் சுன்னங்களாகும். ஏனெனின், இக் கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் (x_1, y_1)-ஓடு ஒன்றுபட்டிருக்கும்.

$$\therefore \quad x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0. \qquad \ldots\ldots (2)$$
$$(x_1+g)\cos\theta + (y_1+f)\sin\theta = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

(3) ஆவது சமன்பாட்டிலிருந்து தொடுவரையின் போக்கினைக் காணலாம்.

(1), (3) இவற்றிலிருந்து θ-வை அகற்றின் தொடுவரையின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

ஆகவே தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}(x_1+g)\cos\theta = -\frac{y-y_1}{\sin\theta}(y_1+f)\sin\theta.$$

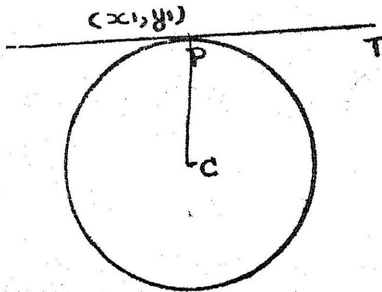
(அ-து) $(x-x_1)(x_1+g)+(y-y_1)(y_1+f)=0.$

(அ-து) $xx_1+yy_1+gx+fy = x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1$
$$= -gx_1 - fy_1 - c.$$

$$\therefore \quad xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

மூன்ருவது முறை—

வட்டத்தின் மையம் C, (x_1, y_1) புள்ளி P எனக் கொள்க.



படம்-44

$\therefore$ மையம் C $(-g, -f)$ ஆகும்.

CP-ன் சாய்வு வீதம் $= \dfrac{y_1+f}{x_1+g}$

CP-க்கு நேர்குத்தாக PT இருத்தலின் PT-ன் சாய்வு வீதம்

$$= -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}$$

(x_1, y_1) புள்ளிவழி PT செல்வதால் PT-ன் சமன்பாடு

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1)$$

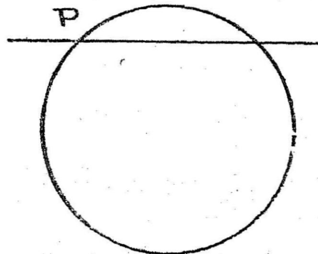
(அ-து) $(x - x_1)(x_1 + g) + (y - y_1)(y_1 + f) = 0.$

(அ-து) $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

இரு பக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$-ஐக் கூட்ட $xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$ (x_1, y_1) வட்டத்தில் இருப்பதால் $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0.$ ஆகவே, (x_1, y_1), இடத்துத்தொடுவரையின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$

குறிப்பு : வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனின், $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$, $T = xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$, $S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ என்று கொள்வது மரபு.

10. $y = mx + c$ கோடும், $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள்.



படம்-45

வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்று P எனக் கொள்வோம். கோடும் வட்டமும் P வழிச் செல்வதால் P-ன் ஆயத்தொலைகள், கோடு, வட்டம் இவற்றின் சமன்பாடுகளில் பொருந்த வேண்டும்.

ஆகவே, இவ்விரு சமன்பாடுகளை விடுவிக்க வரும் தீர்வுகள் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளாகும்.

$mx + c$-ஐ $x^2 + y^2 = a^2$ சமன்பாட்டில் y-க்கு ஈடாக்கின் $x^2 + (mx + c)^2 = a^2$ என்று வரும்.

(அ-து) $(1 + m^2) x^2 + 2m cx + c^2 - a^2 = 0.$

இது x-ல் இருபடிச் சமன்பாடு ஆதலின் இதற்கு இரு தீர்வுகள் உண்டு. அவை x_1, x_2 என்று கொள்க.

x_1, x_2-ஐ $y = mx + c$-ல் ஈடு கொடுத்தால் இம் மதிப்புகளுக்கு எதிர் நிலையான மதிப்புகள் $mx_1 + c$, $mx_2 + c$. ஆகவே, வெட்டும் புள்ளிகள் $(x_1, mx_1 + c)$, $(x_2, mx_2 + c)$.

11. $y = mx + c$ கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் தொடுவரையாவதற்கு ஏற்ற கட்டுப்பாட்டினை இதனுற் காணலாம்.

$(1 + m^2) x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ (1) சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கோடும், வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள் என்று முற்பகுதியில் கண்டோம்.

வட்டத்தினை $y = mx + c$ தொடுமெனின் வெட்டும் இரு புள்ளிகளும் ஒன்றுபடும். அந்நிலையில் அவற்றின் ஆயத்தொலைகள் சமமாகும்.

ஆகவே, (1) சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமாம்.

$\therefore \quad 4m^2c^2 = 4(c^2 - a^2)(1 + m^2).$

அதாவது $c^2 = a^2(1 + m^2).$

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$$y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2} \text{ ஆகும்.}$$

12. $y=mx+c$, $x^2+y^2=a^2$-ஐத் தொட்டால் தொடுகுத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காணல்.

$y = mx + c$ வட்டத்தினை $P(x_1, y_1)$-ல் தொடும் எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ PT-ன் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.

$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0.$

$mx - y + c = 0.$ இவை ஒரே கோட்டின் சமன்பாடுகள்.

$$\therefore \frac{x_1}{m} = -y_1 = -\frac{a^2}{c}.$$

(அ-து) $x_1 = -\dfrac{a^2m}{c}$, $y_1 = \dfrac{a^2}{c}$.

(x_1, y_1) வட்டத்தில் இருத்தலின் $x_1^2 + y_1^2 = a^2$

ஆகவே, $\dfrac{a^4m^2}{c^2} + \dfrac{a^4}{c^2} = a^2$

$\therefore \quad c^2 = a^2(1 + m^2).$

$\therefore$ P-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{\dfrac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right\}$

(13) ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுவரைகள் உண்டு என நிறுவுதல்.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ எனவும், புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்க.

$x^2 + y^2 = a^2$-ன் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$y = mx + a\sqrt{1 + m^2}$ எனக் கண்டோம்.

இது (x_1, y_1) வழிச் சென்றால்

$$y_1 = mx_1 + a\sqrt{1 + m^2} \qquad \ldots(1)$$

(x_1, y_1) வழிச் செல்லும் தொடுவரைகளின் 'm'-கள் இச் சமன்பாட்டால் கிடைக்கும்.

$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1 + m^2).$

(அ-து) $(x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1^2 - a^2 = 0 \quad \ldots(2)$

இது இருபடிச் சமன்பாடு. ஆகையால் m-க்கு இரு மதிப்புகள் வரும். ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் நேர் நிலையாக ஒரு தொடுவரை உண்டு ஆகவே (x_1, y_1) வழி இரு தொடு வரைகள் உள.

(14) T (x_1, y_1)-லிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$-க்கு வரையும் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு.

T (x_1, y_1) வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ என்று கொள்வோம்.

இக் கோடு வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டின் TP, TQ நீளங்களைப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் கணக்கிடலாம்.

$$r^2 + 2\{(x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta\}r + x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0. \qquad \ldots(1)$$

இந்தக் கோடு வட்டத்தைத் தொட்டால் P, Q புள்ளிகள் ஒன்றுபடும். அந்நிலையில் TP, TQ நீளங்கள் சமமாகும். (1) சமன்பாட்டுக்கு இரு சமத்தீர்வுகள் உண்டு.

$\therefore \quad \{(x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta\}^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$ ...(2)

இச் சமன்பாட்டினால் (x_1, y_1)-லிருந்து வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் போக்கினைக் காணலாம். $\cos\theta$, $\sin\theta$-க்குப் பதில் நிரலே $x-x_1$, $y-y_1$-ஐ (2)-ல் ஈடாக்கின், T-லிருந்து வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும். தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$$\left\{\frac{(x_1 + g)(x - x_1)}{r} + \frac{(y_1 + f)(y - y_1)}{r}\right\}^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

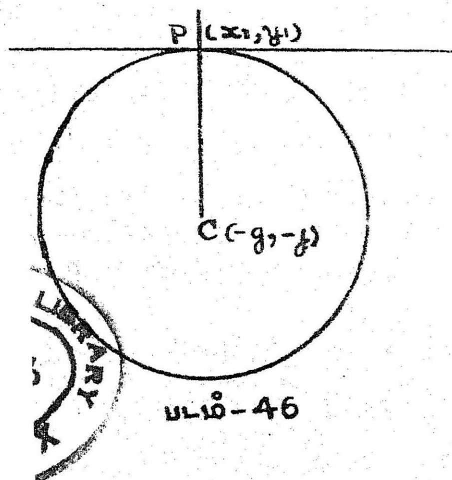
(அ-து) $\{(x_1 + g)(x-x_1) + (y_1+f)(y-y_1)\}^2 = (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)r^2$

(அ-து) $\{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c - (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)\}^2$
$= (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}$

(அ-து) $(T-S_1)^2 = S_1(x^2+y^2-2xx_1-2yy_1+x_1^2+y_1^2)$
$= S_1\{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c - 2(xx_1 + yy_1 + g\,\overline{x + x_1} + f\,\overline{y + y_1} + c.\}$
$= S_1(S + S_1 - 2T).$

(அ-து) $T^2 = SS_1.$

15. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தில் (x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு.



படம்-46

மையம் C $(-g, -f)$ ஆகும். P இடத்துச் செங்கோடு C வழிச் செல்லும்.

$\therefore$ CP செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{x_1 + g} = \frac{y - y_1}{y_1 + f}.$$

மாதிரி 10 :

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தினை $lx + my + n = 0$ கோடு தொடுதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன ?

வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$, ஆரை $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$. $lx + my + n = 0$ வட்டத்தைத் தொடுமெனின் $(-g, -f)$ -லிருந்து $lx + my + n = 0$-க்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோட்டின் நீளம் ஆரையாகும்.

$$\therefore \quad \pm \frac{-lg - mf + n}{\sqrt{l^2 + m^2}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}.$$

ஆகவே, $(l^2 + m^2)(g^2 + f^2 - c) = (-lg - mf + n)^2$.

மாதிரி 11 :

K-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு $4x + 3y + K = 0$ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$-க்குத் தொடுவரையாகும்?

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$.

ஆகவே, அதன் மையம் $(2, 3)$, ஆரை $= 2$. $(2, 3)$-லிருந்து $4x + 3y + K = 0$-க்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோட்டின் நீளம் 2-ஆக இருப்பின் $4x + 3y + K = 0$, வட்டத்தைத் தொடும்.

$$\therefore \quad \pm \frac{4 \times 2 + 3 \times 3 + K}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \pm \frac{17 + K}{5} = 2.$$

$\therefore$ K $= -27$ அல்லது -7.

மாதிரி 12 :

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் நீளங்கள் $1 : 2$ தகவில் இருந்தால், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டமென நிறுவுக.

அப் புள்ளியை (x_1, y_1) என்று கொள்க.

(x_1, y_1)-லிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடு வரைகளின் நீளங்கள் நிரலே $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 6y_1 + 9}$, $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 - 2y_1 + 1}$ ஆகும்.

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 6y_1 + 9}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 - 2y_1 + 1}} = \frac{1}{2}.$$

(அ-து) $4(x_1^2+y_1^2-2x_1-6y_1+9) = x_1^2+y_1^2+6x_1-2y_1+1$

(அ-து) $3x_1^2+3y_1^2-14x_1-22y_1+35=0$

$\therefore$ (x_1, y_1), $3x^2+3y^2-14x-22y+35=0$ வட்டத்தில் எப்போதும் இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகவே, (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $3x^2 + 3y^2 - 14x - 22y + 35 = 0$ என்னும் வட்டமாகும்.

மாதிரி 13 :

(3, 2) வழி $2x + 3y - 5 = 0$ கோட்டினை (1, 1) இடத்துத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தின் சமன்பாடு எனக் கொள்வோம்.

(1, 1) இடத்துத் தொடும் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$x + y + g(x + 1) + f(y + 1) + c = 0.$$

(அ-து) $x(1 + g) + y(1+f) + g+f+c=0$. இச் சமன்பாட்டினை

$2x + 3y - 5 = 0$-வோடு ஒப்பிடின் $\frac{1+g}{2} = \frac{1+f}{3} = \frac{g+f+c}{-5}$ (1) என்று வரும்.

(3, 2) வட்டத்தில் இருப்பதால் $13 + 6g + 4f + c = 0$ (2)

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$$g = -\frac{12}{7}, \quad f = -\frac{29}{14}, \quad c = \frac{39}{7}.$$

ஆகவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$7x^2 + 7y^2 - 24x - 29y + 39 = 0$ ஆகும்.

மாதிரி 14 :

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ வட்டத்துக்கு ஆதியிலிருந்து வரையுந் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு என்ன ?

(x_1, y_1)-லிருந்து, $S = 0$ க்கு வரையுந் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு $SS_1 = T^2$.

இங்கு $S = x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5$

$S_1 = 5$

$T = -3x + y + 5.$

$\therefore$ தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$$(x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5)\,5 = (-3x + y + 5)^2$$

(அ-து) $5x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 25 = 9x^2 + y^2 + 25 - 6xy - 30x + 10y$

(அ-து) $4x^2 - 6xy - 4y^2 = 0$

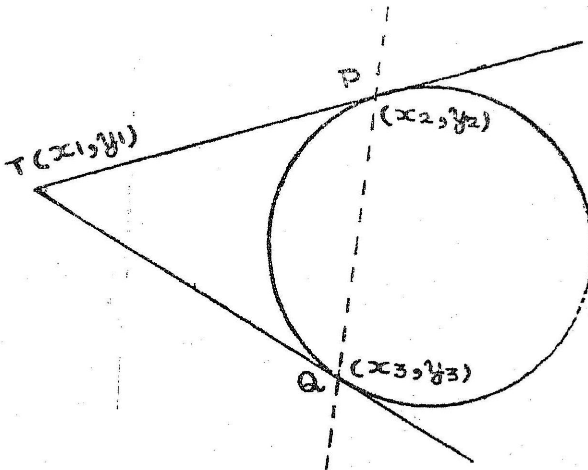
(அ-து) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$

(அ-து) $(2x + y)(x - 2y) = 0$

$\therefore$ தொடுவரைகளின் தனித் தனிச் சமன்பாடு

$$2x + y = 0,\quad x - 2y = 0$$

16. (x_1, y_1)-லிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$-க்கு வரையும் தொடுவரைகளின் தொடு நாணுக்குச் (Chord of Contact) சமன்பாடு காணுதல்.



படம்-47

T, P, Q இவை நிரலே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனக் கொள்க. P இடத்துத் தொடுவரை

$$xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c = 0 \quad \dots(1)$$

Q இடத்துத் தொடுவரை

$$xx_3 + yy_3 + g(x + x_3) + f(y + y_3) + c = 0 \quad \dots(2)$$

இவ்விரு தொடுவரைகளும் (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால்

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0 \quad (3)$$

$$x_1 x_3 + y_1 y_3 + g(x_1 + x_3) + f(y_1 + y_3) + c = 0 \quad (4)$$

(3), (4) ஆல் $P(x_2, y_2)$, $Q(x_3, y_3)$ புள்ளிகள்

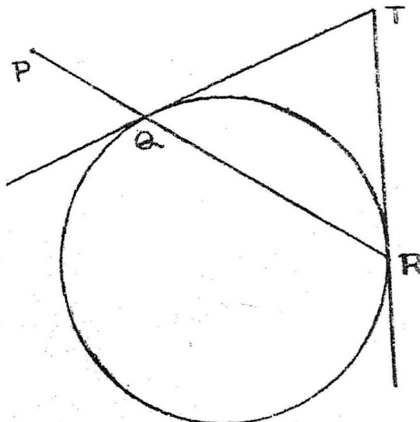
$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$-ல் உள எனக் காணலாம்.

∴ PQ-ன் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

17. துணைப் புள்ளியும் துணைக்கோடும் (Pole and Polar) வரையறை. P வழிச் செல்லும் ஒரு கோடு வட்டத்தினை வெட்டும் Q, R புள்ளியிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை P-ன் துணைக்கோடு (Polar) என்றும், P துணைக் கோட்டின் துணைப்புள்ளி (Pole) என்றும் கூறப்படும்.

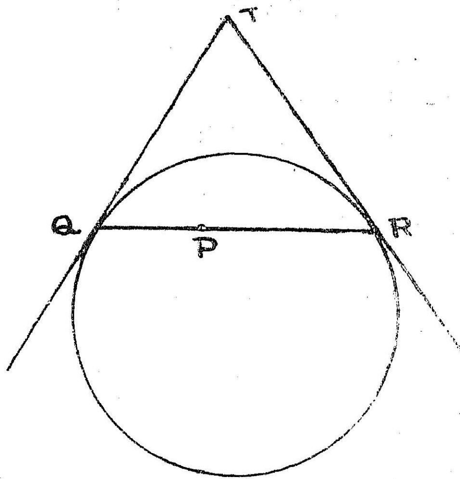
18. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தைச் சார்ந்து (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு.



படம்-48

P வழிச் செல்லும் கோடு வட்டத்தினை Q, R-ல் வெட்டும் எனவும் Q, R இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி T (h, k) எனவும் கொள்வோம்.

T-ன் இயங்குவரை P-ன் துணைக் கோடாகும்.



படம்-49

T-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் தொடுநாண் QR ஆகையால் QR-ன் சமன்பாடு $xh + yk + g(h+x) + f(k+y) + c = 0$.

இக் கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால் $x_1h + y_1k + g(h + x_1) + f(k + y_1) + c = 0$.

இக் கட்டுப்பாடு உண்மைப்பட (h, k) எப்போதும் $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ கோட்டில் இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே, (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ ஆகும். இங்கு (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை, (x_1, y_1)-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் தொடுநாண், (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகள் ஒன்றுபோல் இருப்பதைக் காணலாம். இம் மூன்றும் ஒரே கோடு என்பதை எளிதில் நிறுவலாம். (x_1, y_1) வட்டத்தின் வெளியே இருப்பின் அதன் துணைக்கோடு தொடுநாண் என்பதும், (x_1, y_1) வட்டவரையில் இருப்பின் அதன் துணைக்கோடு (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை என்பதும் கருதற்பாலது.

19. P-ன் துணைக்கோடு Q-வழிச் சென்றால் Q-ன் துணைக்கோடு P-வழிச் செல்லும்.

வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2$ என்றும், P, Q புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றும் கொள்வோம்.

P-ன் துணைக்கோடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.

இக் கோடு (x_2, y_2) வழிச் செல்வதால்

$$x_2 x_1 + y_2 y_1 = a^2.$$

ஆகவே, (x_2, y_2) புள்ளி $xx_1 + yy_1 = a^2$-ல் இருக்கும். அஃதாவது Q, P-ன் துணைக்கோட்டில் இருக்கும்.

20. துணை இயப் புள்ளிகள் (Conjugate points): இரு புள்ளிகளுள் ஒன்றின் துணைக்கோடு மற்றதின் வழிச் சென்றால் இப் புள்ளிகள் துணை இயப் புள்ளிகள் எனக் கூறப்படும்.

துணை இயக் கோடுகள். இரு கோடுகளுள் ஒன்றின் துணைப் புள்ளி மற்றொன்றில் இருப்பின், அக்கோடுகள் துணை இயக் கோடுகள் (Conjugate lines) எனக் கூறப்படும்.

21. வட்டத்தைச் சார்ந்த ஒரு கோட்டின் துணைப் புள்ளி.

$x^2 + y^2 = a^2$-ஐச் சார்ந்த $Ax + By + C = 0$-ன் துணைப் புள்ளியைக் காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$Ax+By+C=0$-ன் துணைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம்.
(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$.

$\therefore$ $Ax+By+C = 0$, $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$ இச் சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{x_1}{A} = \frac{y_1}{B} = -\frac{a^2}{C}$$

ஆகவே, $x_1 = -\dfrac{Aa^2}{C}$, $y_1 = -\dfrac{Ba^2}{C}$.

$$\therefore \ Ax+By+C = 0\text{-ன் துணைப்புள்ளி } \left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Ba^2}{C}\right)$$

22. (x_1, y_1) (x_2, y_2) புள்ளிகள் $x^2 + y^2 = a^2$-ஐச் சார்ந்த துணை இயப் புள்ளிகளாதற்குரிய கட்டுப்பாடு.

(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு (x_2, y_2) வழிச் சென்றால் (x_1, y_1), (x_2, y_2) துணை இயப் புள்ளிகள் எனக் கண்டோம்.
(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.

இக் கோடு (x_2, y_2) வழிச் செல்வதால்

$$x_1x_2 + y_1y_2 = a^2.$$

23. $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகள் $x^2 + y^2 = a^2$-ஐச் சார்ந்த துணை இயக் கோடுகளாதற்கு உரிய கட்டுப்பாடு.

இரு கோடுகளுள் ஒன்றின் துணைப்புள்ளி மற்றொன்றில் இருப்பின், அக் கோடுகள் துணை இயக் கோடுகள் என வரையறுத்தோம்.

$x^2 + y^2 = a^2$-ஐச் சார்ந்த $lx + my + n = 0$-ன் துணைப் புள்ளி $\left(-\frac{la^2}{n}, -\frac{ma^2}{n}\right)$. இப் புள்ளி $l_1x + m_1y + n_1 = 0$-ல் இருப்பின் $-\frac{ll_1a^2}{n} - \frac{mm_1a^2}{n} + n_1 = 0$.

(அ-து) $(ll_1 + mm_1)\, a^2 = nn_1$.

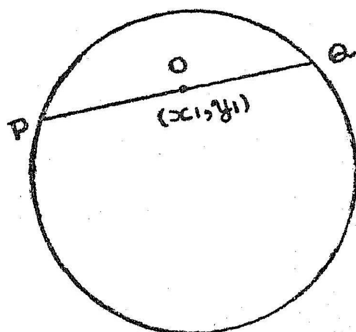
24. குறித்த புள்ளியை நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தில் நாண் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) வழிச் செல்லும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r.$$

இங்கு இந் நாண் x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் θ, (x, y) (x_1, y_1) இப் புள்ளியின் இடைப்பட்ட தொலை r.



படம்-50

இக் கோட்டில் $OP = r$ எனின், P-ன் ஆயத்தொலைகள் $(x_1 + r\cos\theta), (y + r\sin\theta)$. இப் புள்ளி வட்ட வரையில் இருந்தால் $(x_1 + r\cos\theta)^2 + (y_1 + r\sin\theta)^2 + 2g(x_1 + r\cos\theta) + 2f(y_1 + r\sin\theta) + c = 0$.

(அ-து) $r^2 + 2\{(x_1+g)\cos\theta + (y_1+f)\sin\theta\}r + x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$. (x_1, y_1), PQ-வின் நடுப்புள்ளியாதலால் இச் சமன்பாட்டால் வரும் r-ன் மதிப்புகள் ஒரே அளவும் மாறுபட்ட குறியும் உடையனவாக இருக்கும்.

$$\therefore \quad (x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta = 0$$

(அ-து) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}$

$\therefore$ நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta}.$$

(அ-து) $\dfrac{x - x_1}{y - y_1} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= -\frac{y_1 + f}{x_1 + g}.$$

(அ-து) $(x - x_1)(x_1 + g) + (y - y_1)(y_1 + f) = 0$.

(அ-து) $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$.

$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$.

(அ-து) $T = S_1$.

மாதிரி 15 :

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ வட்டத்தின் நாண்கள் x ஆயத்தோடு $\tan^{-1}\dfrac{3}{5}$ கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின் அவற்றின் நடுப்புள்ளிகளுடைய இயங்குவரை என்ன ?

அத்தகைய நாணொன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) என்று கொள்வோம்.

நாணின் சமன்பாடு.

$xx_1 + yy_1 + 2(x + x_1) - 3(y + y_1) + 9 = x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 - 6y_1 + 9$.

(அ-து) $x(x_1+2) + y(y_1 - 3) - x_1^2 - y_1^2 - 2x_1 + 3y_1 = 0$.

இக்கோடு x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\dfrac{3}{5}$.

$$\therefore \quad -\frac{x_1 + 2}{y_1 - 3} = \frac{3}{5}.$$

(அ-து) $5x_1 + 3y_1 + 1 = 0$.

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $5x + 3y + 1 = 0$ ஆகும்.

மாதிரி 16 :

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தில் (h, k) புள்ளிவழிச் செல்லும் நாண்களின் நடுப்புள்ளியினது இயங்குவரையினைக் காண்க.

(h, k) வழிச் செல்லும் நாணொன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) என்று கொள்வோம்.

(x_1, y_1)-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

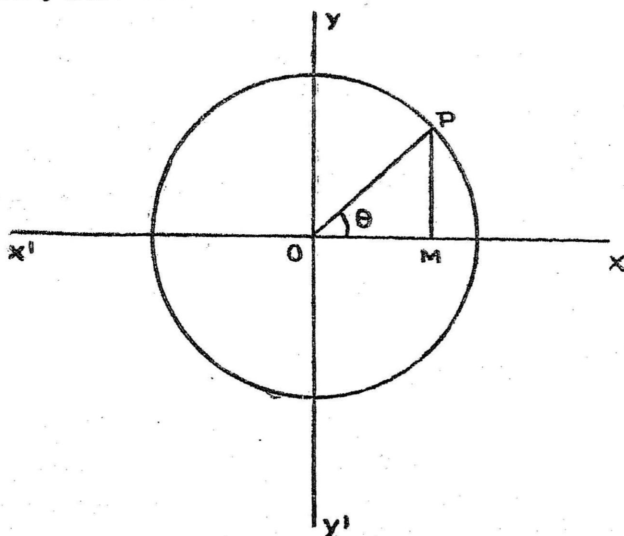
இக் கோடு (h, k) வழிச் செல்வதால்

$$hx_1 + ky_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$.

இது $(0, 0)$, (h, k) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டமாகும்.

25. ஆதியை மையமாகக் கொண்ட a ஆரையுடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$. இவ் வட்டத்தில் P என்ற ஒரு புள்ளி எடுத்து, OP, x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்குங் கோணம் θ எனக் கொள்க.



படம்-51

P, எந்தக் கால் வட்டத்தில் இருப்பினும் அதன் x ஆயத்தொலை $= a \cos \theta$, y ஆயத்தொலை $= a \sin \theta$.

சில இடங்களில் $x^2 + y^2 = a^2$-ல் இருக்கும் புள்ளிகளை (x_1, y_1)-க்குப் பதில் $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ என்று குறிப்பிடல் எளிதாக இருக்கும்.

$(a \cos \theta, a \sin \theta)$, $(a \cos \phi, a \sin \phi)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$$\frac{x - a \cos \theta}{a (\cos \theta - \cos \phi)} = \frac{y - a \sin \theta}{a (\sin \theta - \sin \phi)}$$

(அ-து) $(x - a\cos\theta)\, 2\sin\frac{\theta-\phi}{2}.\ \cos\frac{\theta+\phi}{2}$

$= -(y - a\sin\theta)\ 2\ \sin\frac{\theta-\phi}{2}.\ \sin\frac{\theta+\phi}{2}$

$2\sin\frac{\theta-\phi}{2}$ ஆல் வகுத்தால் $x\ \cos\frac{\theta+\phi}{2} + y\ \sin\frac{\theta+\phi}{2}$

$= a\ \cos\frac{\theta-\phi}{2}$ என்று வரும்.

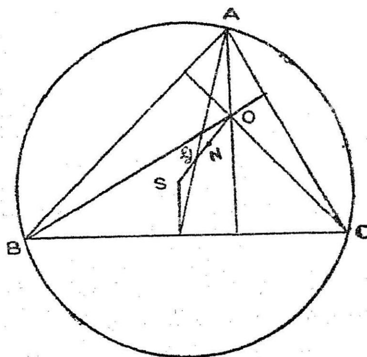
'ϕ' புள்ளி நகர்ந்து 'θ' புள்ளியோடு ஒன்றுபடின் 'θ' புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை கிடைக்கும்.

'θ' இடத்துத் தொடுவரை $x\cos\theta + y\sin\theta = a$.

'θ' இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைப் பிறிதொரு முறையாலும் காணலாம். (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை $xx_1 + yy_1 = a^2$. இங்கு x_1, y_1 இவற்றிற்குப் பதில் நிரலே $a\cos\theta$, $a\sin\theta$ வை ஈடாக்கின் 'θ' இடத்துத் தொடுவரை

$x\cos\theta + y\sin\theta = a$ என்று வரும். வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ எனின், வட்டத்தில் இருக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)$ ஆகும். அவ்விடத்து வட்டத்தின் தொடுவரைச் சமன்பாடு $(x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta = R$ ஆகும்.

26. ABC முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் வரைந்து, சுற்றுவட்ட மையத்தினை ஆதியாக எடுப்பின் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = R^2$. இங்கு R சுற்றுவட்ட ஆரையாகும். இம் முக்கோணத்தின் முனைகளை $A(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$; $B(R\cos\beta, R\sin\beta)$; $C(R\cos\gamma, R\sin\gamma)$ என்று கொள்ளலாம்.



படம்-52

இங்கு S (0, 0), G நடுக்கோட்டு மையம் $\{\frac{1}{3}R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma), \frac{1}{3}R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\}$ ஆகும்.

$\frac{SG}{GO} = \frac{1}{2}$.

O-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனின், G-ன் x ஆயத்தொலை $= \frac{2 \times 0 + x_1}{3}$.

$$(\text{அ-து}) \ \tfrac{1}{3} R (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = \frac{x_1}{3}.$$

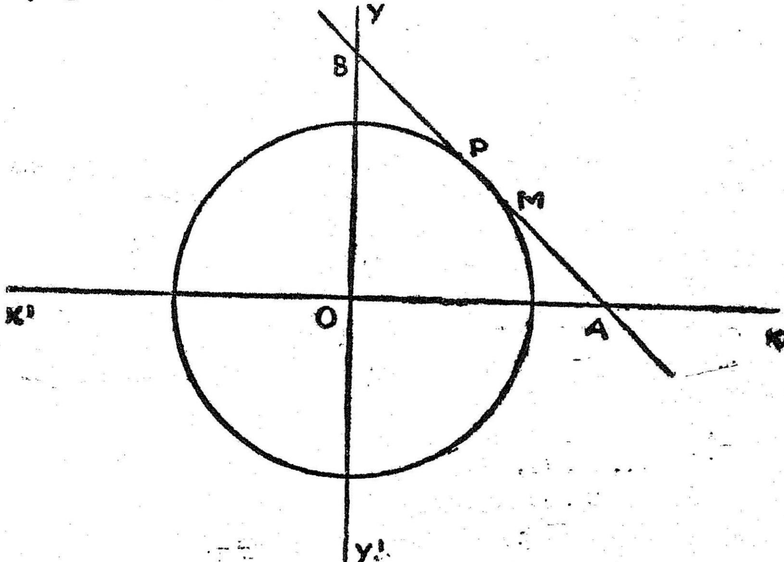
$$\therefore \quad x_1 = R (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

இவ்வாறே $y_1 = R (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$. ஒன்பது புள்ளி வட்ட மையம் (Nine Point centre) N எனின், அதன் ஆயத்தொலைகள் $\frac{R}{2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$, $\frac{R}{2} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$ ஆகும்.

$R (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = 2h$, $R (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 2k$ எனின், $G (\frac{2}{3}h, \frac{2}{3}k)$, $O (2h, 2k)$, $N (h, k)$ ஆகும். ஒன்பது புள்ளி வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - h)^2 + (y - k)^2 = \frac{1}{4} R^2$.

மாதிரி 17 :

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் ஆயங்களிடைப்பட்ட தொடுவரைப் பகுதி நடுப்புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன ?



படம்-53

AB-ன் நடுப்புள்ளி M (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

P $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$x\cos\theta + y\sin\theta = a.$$

இத் தொடுவரை x ஆயத்தை A-ஆல் வெட்டின் A-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{a}{\cos\theta}, 0\right)$

இவ்வாறே B-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(0, \frac{a}{\sin\theta}\right)$

$$\therefore\quad 2x_1 = \frac{a}{\cos\theta};\quad 2y_1 = \frac{a}{\sin\theta}.$$

இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து θ வை அகற்றின்

$$\frac{a^2}{4x_1^2} + \frac{a^2}{4y_1^2} = 1$$

$$\therefore\quad (x_1, y_1)\text{-ன் இயங்குவரை } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{a^2}.$$

பயிற்சிகள் 10

1. பின்வரும் வட்டங்களின் மையம், ஆரைகளைக் காண்க :—

   (1) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 39 = 0.$
   (2) $2x^2 + 2y^2 + 6x + 4y = 0.$
   (3) $3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0.$
   (4) $3x^2 + 3y^2 + 4x - 8y - 41 = 0.$

2. பின்வரும் புள்ளிகள் மையமாகத் தொலைகள் ஆரையாகக் கொண்ட வட்டங்களின் சமன்பாட்டினைக் காண்க :—

   (1) மையம் (1, —4), ஆரை 5
   (2) மையம் (—2, 3), ஆரை 7/2.
   (3) மையம் (—1, —2), ஆரை 3/2.
   (4) மையம் (3/2, 7/2), ஆரை 6.

3. பின்வரும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க :

   (1) (0, 1), (2, 3), (—2, 5).
   (2) (1, 1), (2, —1), (2, 2).
   (3) (1, 0), (2, 3), (3, —1).

4. $y = 2x$, $y = 3x$, $y = 5x + 4$ கோடுகளால் அமைந்த சுற்றுவட்டச் சமன்பாடு என்ன ?

5. (2, 1) புள்ளிவழி ஆயங்களைத் தொடும் வட்டங்களைத் காண்க.

6. ஆயங்களையும் $3x - 4y = 12$ கோட்டினையும் தொடும் வட்டங்களைக் காண்க.

7. $x^2 + y^2 = 25$, $2x^2 + 2y^2 - 4x - 3y = 25$ வட்டங்கள் தொடுமென நிறுவுக.

8. பின்வரும் வட்டங்களின் சமன்பாட்டினைக் காண்க :—

(1) ஆதி வழி (1, 2) புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டம்.

(2) (2, 3) புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு, x ஆயத்தைத் தொடும் வட்டம்.

(3) $x + y = 6$, $2x + y = 4$, $x+2y = 3$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம்.

(4) (—1, 2), (3, — 2) வழி $x = 2y$ கோட்டில் மையம் இருக்கும் வட்டம்.

(5) (2, — 3) (— 2, 4) புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்.

(6) (6, 1) புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு $5x + 12y = 3$ கோட்டினைத் தொடும் வட்டம்.

(7) (2, 3) வழி ஆயங்களைத் தொடும் வட்டம்.

(8) ஆதியிலிருந்து தொலை 5-க்கு அப்பால் ஆயங்களைத் தொடும் வட்டம்.

(9) ஆயங்களைத் தொடும் a ஆரையுடைய வட்டம்.

9. $x^2 + y^2 = 400$, $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 12 = 0$ அகந்தொடு வட்டங்கள் என நிறுவுக.

10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 18y + 26 = 0$ புறந்தொடு வட்டங்கள் என நிறுவுக.

11. படம் வரையாது (— 1, 2), (0, 0), (6, — 4) புள்ளிகள் $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$ வட்டத்தின் உள், வெளி, வட்டவரை என்றிவற்றில் எங்கு உள என்பதைக் காண்க.

8

12. (7, 1), (6, 4), (—2, 4), (5, 7) புள்ளிகளால் அமைந்த நாற்சிறை ஒரு வட்ட நாற்சிறையென நிறுவுக.

13. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $4x^2 + 4y^2 = 9$, $9x^2 + 9y^2 = 16$ வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் விகிதம் 3 : 4 எனின், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன?

14. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் விகிதம் 1 : 2 என இருக்க அப் புள்ளி இயங்குமாயின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டமென நிறுவுக இவ் வட்டத்தின் மையம், ஆரையைக் காண்க.

15. (1, 0), (2, 0), (3, 2) புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் நீளங்கள் நிரலே 1, $\sqrt{7}$, $\sqrt{2}$ என்றிருப்பின், வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

16. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ க்குத் தொடுவரைகள் வரையின், அத் தொடுவரைகள் அவற்றின் நாண் என்றிவற்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\dfrac{a(x_1^2 + y_1^2 - a^2)^{3/2}}{x_1^2 + y_1^2}$ என நிறுவுக.

17. m-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு $y = mx$ கோடு $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ வட்டத்தினைத் தொடும்?

18. $y + x = 0$ கோட்டினுக்கு ஒருபோகான $x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0$ வட்டத்தின தொடுவரைகள் யாவை?

19. (6, 3) புள்ளிவழி ஆயங்களைத் தொடும் வட்டங்களின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ் வட்டங்களின் (6, 3) இடத்துத் தொடுவரைகளின் சமன்பாடும் காண்க. இத் தொடுவரைகளுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளங்கள் சமம் என நிறுவுக.

20. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகள் தம்முள் செங்குத்தாக இருப்பின், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன?

21. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் இடைப்பட்ட கோணம் $120°$ எனின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை $3x^2 + 3y^2 + 12x - 18y + 35 = 0$ என நிறுவுக.

22. $x = 0$, $y = 4$, $2x + y = 2$ கோடுகளைத் தொடும் வட்டங்களின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

23. $y = x + 2$, $3y = 4x$, $2y = 3x$. இக் கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் $x^2 + y^2 - 46x + 22y = 0$ என நிறுவுக.

24. $lx + my = 1$ கோடு $ax^2+2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளை P, Q-ல் வெட்டின் PQ-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் $(am^2 - 2hlm + bl^2)(x^2 + y^2) - 2(bl - hm)x - 2(am - hl)y + (a + b) = 0$ என நிறுவுக.

25. $x^2 + y^2 = 25$ வட்டத்தைச் சார்ந்த $3x + 4y = 5$ கோட்டின் துணைப்புள்ளி என்ன ?

26. P, Q-விருந்து நிரலே Q, P-யின் துணைக்கோடுகளுக்கு நேர்குத்துக் கோடுகள் வரையின், இவற்றின் நீள விகிதம், வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து இப்புள்ளிகளின் தொலை விகித மாகும் என நிறுவுக.

27. இரு புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தைச் சார்ந்த துணை இய புள்ளிகளாக இருந்தால், அவற்றின் இடைப்பட்ட தொலையின் இருபடி, அப் புள்ளிகளிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையும் தொடு வரைகளின் இருபடியின் கூட்டுத் தொகையாகும் என நிறுவுக.

28. நேர்குத்தான இரு கோடுகள் ஒரு வட்டத்தைச் சார்ந்த துணை இய கோடுகளாயின், அவற்றில் ஒன்று மையம் வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

29. குறித்த இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டங்களைச் சார்ந்த குறித்த ஒரு கோட்டின் துணைப் புள்ளியின் இயங்கு வரை என்ன?

30. இருநிலைப் புள்ளிகள், குறித்த நீளத்தை ஆரையாகக் கொண்ட வட்டத்தைச் சார்ந்த துணை இயப் புள்ளிகளாக இருப்பின், வட்ட மையத்தின் இயங்குவரை என்ன?

31. $x^2 + y^2 = c^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த, $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ வட்டத்துத் தொடுவரைகளின் துணைப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை $(a^2 - b^2) x^2 - b^2 y^2 - 2c^2 ax + c^4 = 0$ என நிறுவுக.

32. $x^2+y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த P-ன் துணைக்கோடு $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = b^2$ வட்டத்தைத் தொட்டால், P-ன் இயங்குவரை $(\alpha x + \beta y - a^2)^2 = b^2 (x^2 + y^2)$ என நிறுவுக.

5. ஒருநிலை வட்டங்கள்

(System of Circles)

1. சமதொடுவரை ஆயம் (Radical Axis)

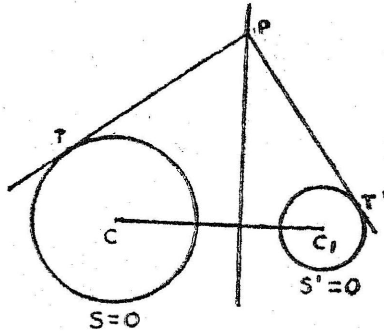
ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு வரைகளின் நீளம் சமமாக இருந்தால், அப் புள்ளியின் இயங்கு வரை வட்டங்களின் சமதொடுவரை ஆயம் (Radical Axis) எனப்படும்.

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

எனக் கொள்வோம்.



படம் 54.

P-லிருந்து இரு வட்டங்களுக்கும் வரையும் தொடுவரைகளின் நீளம் சமமாக இருந்தால், P-ன் இயங்குவரை சமதொடுவரை ஆயமாகும்.

P (x_1, y_1) எனவும், P-லிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுவரைகளை PT, PT'-எனவும் கொள்வோம்.

$$PT^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

$$PT'^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1.$$

இங்கு $PT = PT'$.

$$\therefore \quad x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c = x_1^2+y_1^2+2g_1x_1+2f_1y_1+c_1.$$

(அ-து) $(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$

$$-(x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1) = 0$$

$\therefore$ P (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$(x^2 + y^2+2gx+2fy + c) - (x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1)=0$$

(அ-து) $S - S' = 0$

சமதொடு வரையாயத்துச் சமன்பாட்டினைச் சுருக்கினுல்

$2(g - g_1)x + 2(f - f_1) \quad y + c - c_1 = 0$ என்று வரும். இது ஒருபடிச் சமன்பாடு ஆதலால் சமதொடுவரையாயம் ஒரு கோடாகும்.

இதன் சாய்வு வீதம் $= -\dfrac{g - g_1}{f - f_1}$

வட்டங்களின் மையங்கள் $(-g, -f)$, $(-g_1 \ -f_1)$

$\therefore$ மையங்களை இணைக்குங் கோட்டின் சாய்வு வீதம்

$$= \frac{f - f_1}{g - g_1}.$$

$\therefore$ சமதொடுவரையாயம் வட்ட மையங்களை இணைக்குங் கோடு, இவற்றின் சாய்வு வீதங்களின் பெருக்குத் தொகை -1 ஆகும்.

ஆகவே, சமதொடுவரையாயம், மையங்கள்வழிச் செல்லும் கோட்டினுக்கு நேர்குத்தாக இருக்கும். இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைகள் அனைத்தையும் சம தொடுவரையாயம் இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

2. இரு வட்டம் தம்முள் தொடுமெனின் தொடுகுத்து இடத்துத் தொடுவரை அவ் வட்டங்களின் சமதொடுவரை ஆயமாகும்.

ஆகவே, இரு வட்டம் தொடுவதறிய அவற்றின் சம தொடுவரையாயம் வட்டங்களில் ஒன்றைத் தொடுமென நிறுவினுல் போதும். எடுத்துக்காட்டாக, $x^2 + y^2 = 400$, $x^2 + y^2 - 10x + 24y + 120 = 0$ வட்டங்களைப் பார்ப்போம்.

இவ் வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம்

$$10x - 24y - 520 = 0$$

(அ-து) $5x - 12y - 260 = 0$.

முதல் வட்டத்தின் மையம் (0, 0) ஆரை 20. (0, 0)-விருந்து $5x - 12y - 260 = 0$-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= \frac{260}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 20$; ஆகவே,

$5x - 12y - 260 = 0$ முதல் வட்டத்தைத் தொடும். சம தொடுவரையாயம் ஒரு வட்டத்தைத் தொடுவதால் மறு வட்டத்தையும் தொடும்.

ஆகவே, இவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடு கின்றன.

3\. $S = 0$, $S' = 0$ இவ் வட்டங்களின் சமதொடுவரை ஆயம் $S - S' = 0$ எனக் கண்டோம்.

$S = 0$, $S' = 0$ சமன்பாடுகளோடு பொருந்தும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $S - S' = 0$ சமன்பாட்டோடும் பொருந்தும். ஆகவே, இவ் வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகள் வழி $S - S' = 0$ செல்லும். இது ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு ஆகையால் வட்டங்களின் பொது நாணின் சமன்பாடாகும்.

இவ் வட்டங்கள் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டினாலும் $S - S' = 0$ அப் புள்ளிகள்வழிச் செல்லும் போது நாணின் சமன்பாடே.

ஆகவே, இரு வட்டங்களின் பொது நாண் அவ் வட்டங் களின் சமதொடுவரையாயமாகும்.

குறிப்பு: ஒருவட்டம் மற்றொரு வட்டத்தின் வட்டவரையைச் சமபங்காகப் பிரித்தால், இவ் வட்டங்களின் பொது நாண் இரண்டாவது வட்டத்தின் மையம் வழிச் செல்லும்.

4\. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda\ (lx + my + n) = 0$ என்ற சமன்பாட்டைப் பார்ப்போம்:

λ எம் மதிப்பு உடையதாகினும் இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

λ-க்கு λ_1, λ_2, மதிப்புகளைக் கொடுத்தால் இந் நிலையிலுள்ள இரு வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda_1 (lx + my + n) = 0.$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda_2 (lx + my + n) = 0.$$

இவ் வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம்

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(lx + my + n) = 0.$$

$$(\text{அ-து}) \quad lx + my + n = 0.$$

ஆகவே, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda (lx+my+n)=0$, λ வேறுபடும்பொழுது, எல்லா இணை வட்டங்களும் (Pair of Circles) $lx + my + n = 0$ கோட்டினைச் சமதொடுவரையாயமாகக் கொள்ளும் ஒரு நிலை வட்டங்களைக் (System of Circles) குறிக்கும். இத்தகைய ஒருநிலை வட்டங்கள் பொது ஆய முடைய வட்டங்கள் (Coaxal Circles) எனப்படும். மையங்களை இணைக்குங் கோட்டினுக்குச் சமதொடுவரையாயம் நேர்குத்தாக இருப்பதால், பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரே கோட்டில் உள.

5. மையங்களை இணைக்கும் கோட்டினை x ஆயமாகவும், சமதொடு வரையாயத்தினை y ஆயமாகவும் பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு காணல்.

இவ் வட்டங்களில் ஒன்று $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்வோம்.

வட்டத்தின் மையம் x ஆயத்தில் இருப்பதால் $f = 0$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$. சமதொடு வரையாயத்தின் சமன்பாடு $x = 0$.

$\therefore$ பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு k-ன் பல மதிப்புக்குத்தக $x^2 + y^2 + 2gx + c + kx = 0$ ஆகும்.

$$(\text{அ-து}) \quad x^2 + y^2 + (2g+k)\, x + c = 0.$$

x-ன் வேறுபடும் கெழுவுக்குப் பதில் 2λ என எழுதினால், வட்டங்களின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ என்று வரும். c மாரு இராசியாகும். λ-வின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்குத்தக இந்த ஒருநிலை வட்டங்களில் ஒரு வட்டத்தை

$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ குறிக்கும். மேலும் λ-வின் மதிப்பினை மாற்றினால் இந்த ஒருநிலை வட்டங்களைச் சேர்ந்த வட்டங்கள் அனைத்தின் சமன்பாடுகளையும் காணலாம்.

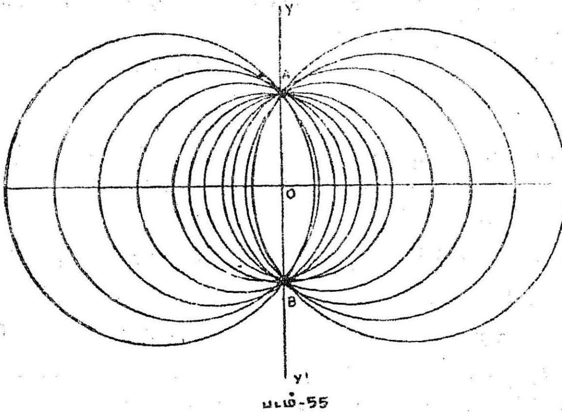
6. பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ எனக் கண்டோம்.

இதனை $(x + \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - c$ என எழுதலாம். λ-ன் மதிப்பு $\pm \sqrt{c}$ ஆக இருப்பின், வட்டங்களின் சமன்பாடு $(x - \sqrt{c})^2 + y^2 = 0$ அல்லது $(x + \sqrt{c})^2 + y^2 = 0$. இவ்வட்டங்களின் மையம் $(\sqrt{c}, 0)$ $(-\sqrt{c}, 0)$; ஆரை சுன்னம். இவ்வட்டங்களில் பொருந்தும் x, y மதிப்புகள் மையங்களின் ஆயத்தொலைகளே யாகும்.

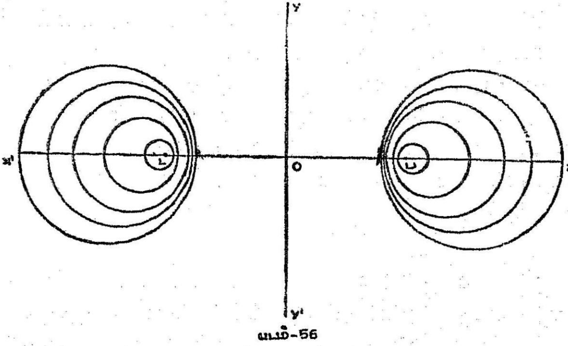
$(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ புள்ளிகள் எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting Points) எனப்படும். இவை, மையங்களை இணைக்கும் கோட்டில் சமதொடுவரையாயத்துக்கு இரு பக்கத்திலும் சமதொலைக்கப்பால் இருக்கும். இப் புள்ளிகளைப் புள்ளி வட்டங்கள் (Point Circles) எனவும் கூறுதல் உண்டு. எல்லைப் புள்ளிகள், c மிகையானால் மெய்ப் புள்ளிகளாகவும், c குறையானால் கற்பனைப் புள்ளிகளாகவும் இருக்கும்.

$x^2 + y^2 + c + 2\lambda x = 0$ வட்டம், $x = 0$ சமதொடுவரையாயத்தினை வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $y^2 + c = 0$ சமன்பாட்டால் காணலாம். ஆகவே, c-ன் மதிப்பு மிகையானால் கற்பனைப் புள்ளிகளிலும் குறையானால் மெய்ப் புள்ளிகளிலும் வட்டம் சமதொடு வரையாயத்தை வெட்டும். ஆகவே, c-ன் மதிப்பு மிகையானால் கற்பனைப் புள்ளிகளிலும், குறையானால் மெய்ப் புள்ளிகளிலும் வட்டங்கள் தம்முள் தாம் வெட்டிக்கொள்ளும் என்று காணலாம்.

மேலும், வெட்டும் பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் கற்பனைப் புள்ளிகள் என்றும், வெட்டாப் பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் மெய்ப் புள்ளிகள் என்றும் அறியலாம்



படம்-55



படம்-56

ஆகவே, $x^2 + y^2 + 2\lambda x + \delta^2 = 0$ வெட்டாப் பொது ஆய முடைய வட்டங்களைக் குறிக்கும். அவற்றின் எல்லைப் புள்ளிகள் $(\delta, 0)$ $(-\delta, 0)$ ஆகும்.

7. பொது ஆயமுடைய வட்டங்களில் எல்லைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொரு வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப் புள்ளிகளாகும்.

$x^2 + y^2 + 2\lambda x + \delta^2 = 0$-ஐச் சார்ந்த $(\delta, 0)$-ன் துணைக் கோடு $x\delta + \delta^2 + \lambda(x + \delta) = 0$.

(அ-து) $(x + \delta)(\delta + \lambda) = 0$.

(அ-து) $x + \delta = 0$.

இக் கோடு மற்றைய எல்லைப் புள்ளி $(-\delta, 0)$ வழிச் செல்லும். ஆகவே $(\delta, 0), (-\delta, 0)$ துணைப் புள்ளிகள்.

8. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $S' \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ வட்டங்களோடு பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு காணல்.

$S + K S' = 0$ (இங்கு K ஒரு நிலையெண்) சமன்பாட்டைப் பார்ப்போம்.

இச் சமன்பாட்டில் x^2-ன் கெழு $= y^2$-ன் கெழு, xy-ன் கெழு $= 0$.

ஆகவே, K-ன் மதிப்பு எதுவாயினும் $S + KS' = 0$ ஒரு வட்டத்தினைக் குறிக்கும்.

மேலும், $S + KS' = 0$, $S = 0$, $S' = 0$ வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.

ஆகவே, K-ன் பல மதிப்புகளுக்குத் தக $S + KS' = 0$, $S = 0$, $S' = 0$ ஒரு பொது ஆயமுடைய வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 1:

$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 5x + y + 4 = 0$ வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை ?

இவ் வட்டங்களோடு பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 + \lambda \ (x^2 + y^2 + 5x + y + 4) = 0$ (1) இத் தரப்பு வட்டங்களைச் சார்ந்த சுன்ன ஆரையுடைய வட்டங்கள், அதாவது புள்ளி வட்டங்கள் எல்லைப் புள்ளிகளாகும்.

(1) சமன்பாட்டினை

$$x^2 + y^2 + \frac{2 + 5\lambda}{1 + \lambda}x + \frac{4 + \lambda}{1 + \lambda}y + \frac{7 + 4\lambda}{1 + \lambda} = 0$$

என்று எழுதலாம்.

இவ் வட்டத்தின் ஆரை சுன்னமாயின்,

$$\frac{(2 + 5\lambda)^2}{4(1 + \lambda)^2} + \frac{(4 + \lambda)^2}{4(1 + \lambda)^2} - \frac{7 + 4\lambda}{1 + \lambda} = 0$$

(அ-து) $(5\lambda + 2)^2 + (\lambda + 4)^2 - 4(4\lambda + 7)(\lambda + 1) = 0$.

(அ-து) $5\lambda^2 - 8\lambda - 4 = 0.$

(அ-து) $(5\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0.$

$$\lambda = 2 \text{ அல்லது } -\frac{2}{5}$$

ஆகவே, புள்ளி வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0 ; \quad x^2 + y^2 + 6y + 9 = 0.$

(அ-து) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 0 ; x^2 + (y + 3)^2 = 0.$

இவ் வட்டங்களின் மையங்களே எல்லைப் புள்ளிகள்.

∴ எல்லைப் புள்ளிகள் $(-2, -1), (0, -3).$

மாதிரி 2 :

$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ வட்டங்களின் பொது நாணினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ் வட்டங்கள் A, B புள்ளிகளில் வெட்டுமெனக் கொள்வோம்.

AB-ன் சமன்பாடு $(x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2) - (x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1) = 0.$

(அ-து) $2x + 1 = 0.$

A, B வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 + \lambda (x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1) = 0.$ இவ் வட்டம் AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்டால், வட்டத்தின் மையம் AB-ல் இருக்கும். வட்டத்தின் சமன்பாட்டினை

$$x^2 + y^2 + \frac{2(2 + \lambda)x}{1 + \lambda} + 3y + \frac{2 + \lambda}{1 + \lambda} = 0$$

என்று எழுதலாம்.

$$\therefore \text{ வட்டத்தின் மையம் } \frac{-(2 + \lambda)}{1 + \lambda}, -\frac{3}{2}$$

இப் புள்ளி $2x + 1 = 0$-ல் இருப்பதால்

$$\frac{-2(2 + \lambda)}{1 + \lambda} + 1 = 0.$$

(அ-து) $-4 - 2\lambda + \lambda + 1 = 0$

$$\lambda = -3.$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 - 3(x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1) = 0.$$

(அ-து) $-2x^2 - 2y^2 - 2x - 6y - 1 = 0.$

(அ-து) $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0.$

மாதிரி 3 :

$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0$ வட்டங்களின் பொது நாண் $2\sqrt{(\lambda^2 - c)(\mu^2 + c) / (\lambda^2 + \mu^2)}$ நீளமுடையது என நிறுவுக.

இவ் வட்டங்கள் A, B புள்ளிகளில் வெட்டுமெனக் கொள்வோம். AB-யின் நீளம் AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் ஆரையின் இரு மடங்காகும். A, B வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c + k(x^2 + y^2 + 2\mu y - c) = 0.$$

(அ-து) $(x^2 + y^2)(1 + k) + 2\lambda x + 2\mu k y + c(1 - k) = 0.$

(அ-து) $x^2 + y^2 + \frac{2\lambda}{1+k} x + \frac{2\mu k}{1+k} y + \frac{c(1-k)}{1+k} = 0.$

இவ் வட்டத்தின் மையம் $\left(-\frac{\lambda}{1+k}, -\frac{\mu k}{1+k}\right)$

$$\text{ஆரை} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{(1+k)^2} + \frac{\mu^2 k^2}{(1+k)^2} - \frac{c(1-k)}{(1+k)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2 k^2 - c(1-k^2)}{(1+k)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda^2 - c + k^2(\mu^2 + c)}{(1+k)^2}}$$

AB-ன் சமன்பாடு

$$(x^2 + y^2 + 2\lambda x + c) - (x^2 + y^2 + 2\mu y - c) = 0.$$

(அ-து) $\lambda x - \mu y + c = 0.$

வட்டத்தின் மையம் AB-ல் இருப்பதால்

$$-\frac{\lambda^2}{1+k} + \frac{\mu^2 k}{1+k} + c = 0.$$

(அ-து) $-\lambda^2 + \mu^2 k + c + ck = 0$

$$\therefore \quad k = \frac{\lambda^2 - c}{\mu^2 + c}.$$

AB = வட்ட ஆரையின் இரு மடங்கு

$$= 2\sqrt{\frac{\lambda^2 - c + \left(\frac{\lambda^2 - c}{\mu^2 + c}\right)^2 \cdot (\mu^2 + c)}{\left(1 + \frac{\lambda^2 - c}{\mu^2 + c}\right)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(\mu^2 + c)^2\ (\lambda^2 - c) + (\lambda^2 - c)^2\ (\mu^2 + c)}{(\mu^2 + c + \lambda^2 - c)^2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(\lambda^2 - c)\ (\mu^2 + c)\ (\mu^2 + c + \lambda^2 - c)}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(\lambda^2 - c)\ (\mu^2 + c)}{(\lambda^2 + \mu^2)}}$$

மாதிரி 4 :

மூன்று வட்டத்துக்குப் பொது சமதொடுவரையாயம் ஒன்று இருந்தால், ஒரு வட்டத்திலிருந்து மற்ற இரண்டிற்கு வரையும் தொடுவரைகளின் தகவு மாறுத் தன்மையதாகும்.

பொது சமதொடுவரையாயத்தினை y ஆயமாகவும், மையங்களை இணைக்கும் கோட்டினை x ஆயமாகவும் கொண்டால், வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_1 x + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_2 x + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_3 x + c = 0$$ என்று கொள்ளலாம்.

முதல் வட்டத்திலிருக்கும் புள்ளி (x_1, y_1) என்றும், அதிலிருந்து ஏனை இரண்டிற்கு வரையும் தொடுவரைகளின் நீளம் t_1, t_2 என்றும் கொண்டால்

$$x_1^2 + y_1^2 + 2\lambda_1 x_1 + c = 0$$

$$t_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2\lambda_2 x_1 + c$$

$$t_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2\lambda_3 x_1 + c$$

$$\therefore \; t_1^2 = 2\lambda_2 x_1 - 2\lambda_1 x_1 = 2x_1(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$t_2^2 = 2\lambda_3 x_1 - 2\lambda_1 x_1 = 2x_1(\lambda_3 - \lambda_1)$$

$$\therefore \; \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{2x_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{2x_1(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

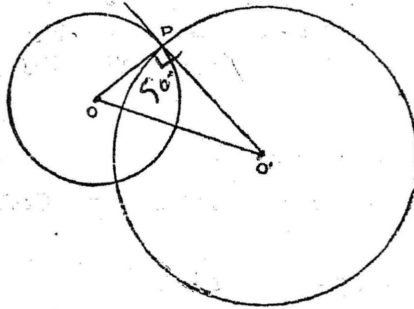
$$\therefore \; \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} = \text{நிலையெண்.}$$

9. இரு வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டும் கட்டுப்பாடு.

வட்டங்கள் —

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ எனக் கொள்வோம்.



படம்-67

இவ் வட்டங்களின் மையங்கள் O, O′, வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்று P எனக் கொள்க.

ஆகவே, $O(-g, -f)$, $O'(-g_1, -f_1)$ ஆகும்.

$$OP = \sqrt{g^2 + f^2 - c}, \qquad O'P = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}.$$

$\hat{OPO'} = 90°$, ஆகையால், $O'O^2 = OP^2 + O'P^2$

(அ-து) $(-g+g_1)^2 + (-f+f_1)^2 = g^2+f^2-c+g_1^2+f_1^2-c_1$

(அ-து) $2gg_1 + 2ff_1 = c + c_1.$

மாதிரி 5 :

(1, 2) வழி $x^2 + y^2 = 9$ வட்டத்தின் வட்ட வரையைச் சம பங்காகவும் பிரித்து $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ வட்டத்தினைச் செங்கோணத்திலும் வெட்டும் வட்டம் யாது ?

அத்தகைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்வோம்.
(1, 2) வழிச் செல்வதால்

$$1^2 + 2^2 + 2g + 4f + c = 0.$$

$$\text{(அ-து)} \quad 2g + 4f + c = -5 \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$x^2 + y^2 = 9$-ன் வட்டவரையைச் சம பங்காகப் பிரிப்பதால்,

$x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
இவ் வட்டங்களின் பொது நாண் $x^2 + y^2 = 9$ வட்ட மைய வழிச் செல்லும். (அ-து) $2gx + 2fy + c + 9 = 0$, (0,0) வழிச் செல்லும்.

$$\therefore \quad c + 9 = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

$x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ வட்டத்தை செங்கோணத்தில் வெட்டுவதால்

$$-2g + 8f = c - 7 \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$c = -9$, $g = 4$, $f = -1$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0.$$

மாதிரி 6 :

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0.$$

$$x^2 + y^2 + 5x - 5y + 9 = 0.$$

$$x^2 + y^2 + 7x - 9y + 29 = 0.$$

இந்த மூவ் வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

அத்தகைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்வோம். இம் மூன்று வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டுவதால்

$$-2g + 3f = c - 7 \quad \dots (1)$$
$$5g - 5f = c + 9 \quad \dots (2)$$
$$7g - 9f = c + 29 \quad \dots (3)$$

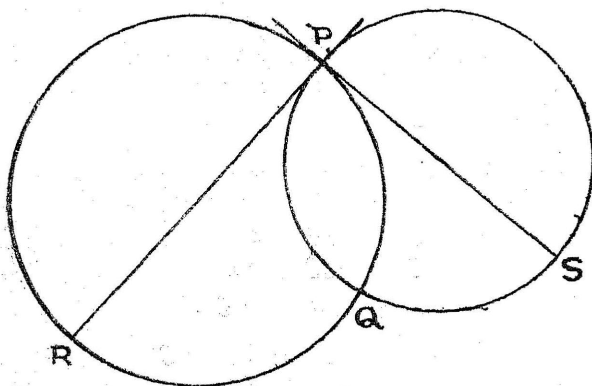
(1), (2), (3) இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$$g = -8, \quad f = -9, \quad c = -4$$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 16x - 18y - 4 = 0$.

மாதிரி 7 :

இரு வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டினால், ஒரு பொதுப் புள்ளியிடத்து வரையும் தொடுவரைகள் வட்டங்களை மீண்டும் வெட்டும். புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு, மற்றப் பொதுப் புள்ளிவழிச் செல்லுமென நிறுவுக.



படம் - 58

வட்டங்கள் P, Q-வில் வெட்டுமெனக் கொள்வோம். P இடத்துத் தொடுவரைகள் PR, PS. வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டுவதால் PR, PS வட்டங்களின் மைய வழிச் செல்லும்.

மேலும் $R\hat{P}S = 90°$.

வட்டங்களின் ஆரைகள் r_1, r_2 என்று கொண்டு PR, PS-யை ஆயங்களாக எடுத்தால் வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 - 2r_1x = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2r_2y = 0$$

R, S புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(2r_1, 0)$ $(0, 2r_2)$

$\therefore$ RS-ன் சமன்பாடு $\dfrac{x}{2r_1} + \dfrac{y}{2r_2} = 1.$

இவ்விரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் Q-ன் ஆயத்தொலைகளைக் காணலாம்.

அவை $\dfrac{2r_1\, r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}, \dfrac{2r_1^2\, r_2}{r_1^2 + r_2^2}$

இம் மதிப்புகள் $\dfrac{x}{2r_1} + \dfrac{y}{2r_2} = 1$-ல் பொருந்தும்.

$\therefore$ RS, Q வழிச் செல்லும்.

10. பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் எல்லைப்புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம், அவ் வட்டங்களனைத்தையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2\lambda x + \delta^2 = 0$ என்று கொண்டால், அதன் எல்லைப் புள்ளிகள் $(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$,

$(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$ வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \delta^2 + 2g\delta + c = 0 \quad \ldots \quad (1)$$
$$\delta^2 - 2g\delta + c = 0 \quad \ldots \quad (2)$$
$$\therefore \quad g = 0, \; c = -\delta^2.$$

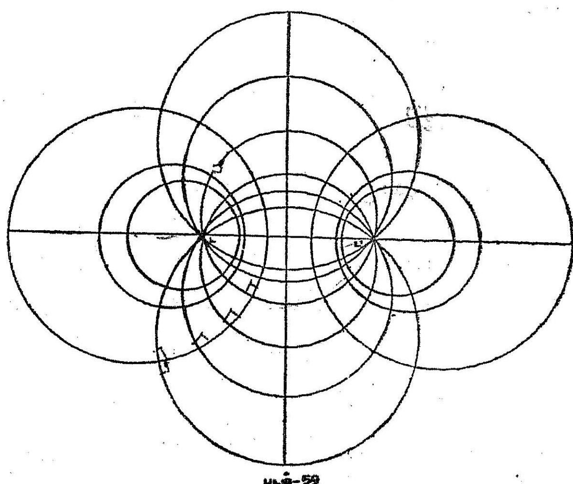
வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2fy - \delta^2 = 0$, f-ன் மதிப்பு யாதாயினும் $x^2 + y^2 + 2\lambda x + \delta^2 = 0$, $x^2 + y^2 + 2fy - \delta^2 = 0$ இவ் வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

f-ன் மதிப்பு மாறுந்தோறும் பல்வேறு வட்டங்கள் கிடைக்கும். ஆனால், இவ் வட்டமனைத்தும் $(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$ வழிச்செல்லும்.

ஆகவே, $x^2 + y^2 + 2fy - \delta^2 = 0$ சமன்பாடு பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்களைக் (a System of Coaxal Circles) குறிக்கும்.

இதன் சமதொடுவரையாயம், முதற் பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்களின் மையங்களை இணைக்குங் கோடாகும். மேலும், இந்த ஒருநிலை வட்டங்கள் இரண்டில் ஒன்றைச் சேர்ந்த வட்டம் ஏனைய ஒருநிலை வட்டங்களைச் சேர்ந்த வட்டமனைத்தையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும். இந்த ஒருநிலை வட்டமிரண்டில் ஒன்று வெட்டும் ஒருநிலை வட்டங்கள், மற்றொன்று, வெட்டா ஒருநிலை வட்டங்களாகும்.

மேலும், இரு வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் ஒரு வட்டத்தின் மையம் வழியே முதல் இரு வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம் செல்லுமென எளிதிற் காணலாம்.



படம்-59

(1) மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்தால் அவற்றின் சமதொடுவரையாயங்கள் ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லும்.

இம் மூன்று வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $S = 0$ (1), $S' = 0$ (2), $S'' = 0$ (3) எனக் கொள்வோம்.

(1), (2) வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம்

$$S - S' = 0.$$

(2), (3) வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம்

$$S' - S'' = 0.$$

(3), (1) வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம்

$$S' - S'' = 0.$$

$(S - S') + (S' - S'') + (S'' - S') = 0$ ஆகையால் இம் மூக்கோடுகளும் ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லும். இப் புள்ளியை $S = S' = S''$ லிருந்து காணலாம். இப் புள்ளி சமதொடு வரை மையம் (Radical Centre) எனக் கூறப்படும்.

சமதொடுவரை மையத்திலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கும். இப் புள்ளியை மையமாகவும், இப் புள்ளியிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுவரையின் நீளத்தினை ஆரையாகவும், கொண்டு வரையும் வட்டம், இம் மூன்று வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

மாதிரி 8 :

$$x^2 + y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - x + 6y + 5 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 5x - 8y + 15 = 0$$

இவ் வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டம் யாது ?

வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயங்கள்

$$4x - 4y - 4 = 0$$
$$-6x + 14y - 10 = 0$$
$$2x - 10y + 14 = 0$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் சமதொடுவரை மையம் (3, 2) என்று வரும்.

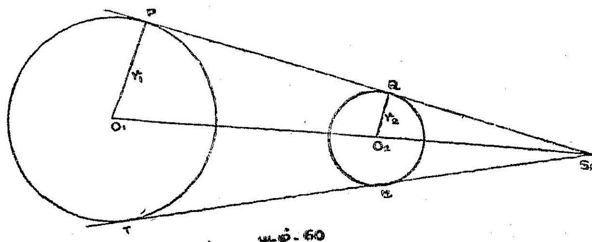
(3, 2)-லிருந்து வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரையின் நீளம் t எனின் $t^2 = 3^2 + 2^2 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 = 27$.

$\therefore$ இம் மூன்று வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 27$$

(அ-து) $\qquad x^2 + y^2 - 6x - 4y - 14 = 0$

12. இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைகள். இவ் வட்டங்களின் மையங்கள் O_1, O_2 என்றும், ஆரைகள் r_1, r_2 என்றும், இவ்வட்டங்களின் ஒரு பொதுத் தொடுவரை $O_1 O_2$ கோட்டினை S_2-ல் வெட்டும் என்றும் கொள்க.



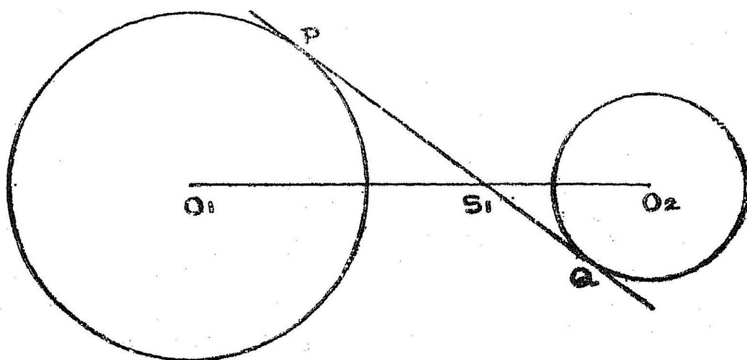
படம்-60

இங்கு, S_2O_2Q, S_2O_1P வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.

$$\therefore \quad \frac{S_2 O_1}{S_2 O_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

ஆகவே, S_2, O_1O_2, கோட்டினை $r_1 : r_2$ தகவுப்படி வெளியிற் பிரிக்கும்.

∴ S_2 வெளிபோன்மை மையம் (External Centre of Similitude) மற்றைய நேர் பொதுத் தொடுவரை (Direct Common Tangent) TU-ம் S_2 வழிச் செல்லும் என எளிதிற் காணலாம்



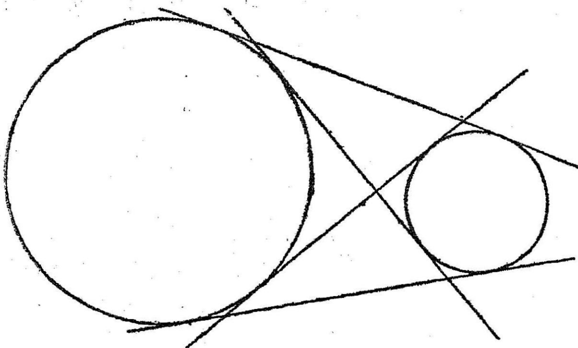
படம்-61

PQ, குறுக்குப் பொதுத் தொடுவரை (Transverse Common Tangent) ஆயின், அது $O_1 O_2$ கோட்டினை $r_1 : r_2$ தகவுப்படி உள்ளே பிரிக்கும் எனக் காணலாம்.

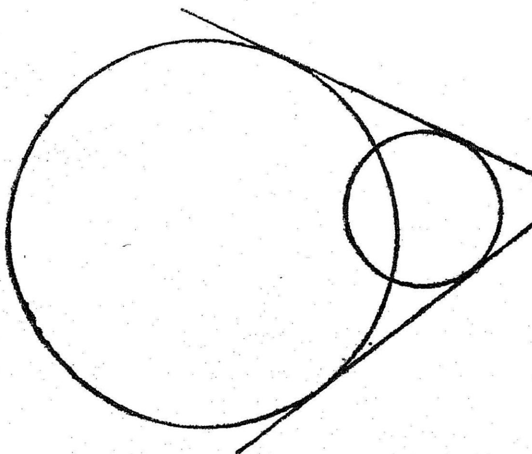
ஆகவே, S_1 உள்போன்மை மையம் (Internal Centre of Similitude) ஏனைய TU குறுக்குத் தொடுவரையும் S_1 வழிச் செல்லும்.

ஆகவே, இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைகளைக் காண்பதற்கு, மையங்களை இணைக்கும் கோட்டினை ஆரைகள் தகவுப்படி உள்ளும் வெளியும் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் கண்டு (அஃதாவது போன்மை மையங்களைக்கண்டு) அவற்றிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுவரைகளைக் காணவேண்டும்.

இரு வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டிக்கொள்ளாவிடின் அவற்றிற்கு நான்கு பொதுத் தொடுவரைகளும், வெட்டிக்

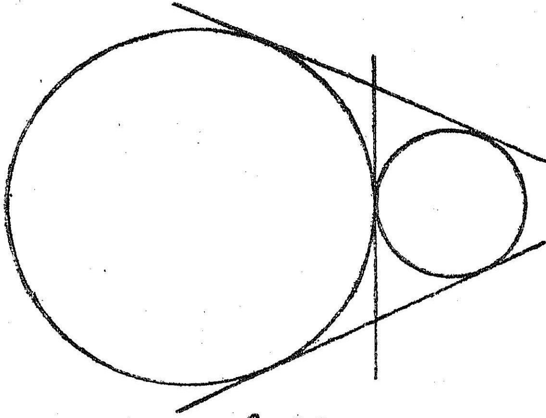


படம் - 62

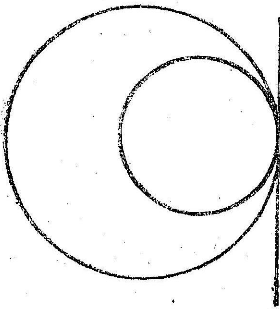


படம் - 63

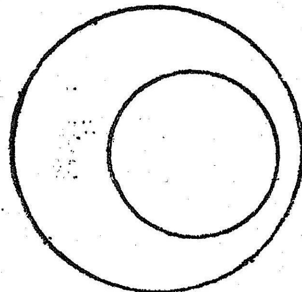
கொண்டால் இரு நேர் பொதுத் தொடுவரைகளும், வெளியில் தொட்டால், மூன்று பொதுத் தொடுவரைகளும், உள்ளே தொட்டால் ஒரு பொதுத் தொடுவரையும் உள. ஒரு வட்டம் ஏனைய வட்டத்தின் உள்ளிருப்பின் பொதுத் தொடுவரைகள் இல்லை.



படம் - 64



படம் - 65



படம் - 66

மாதிரி 9 :

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$
வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைகள் யாவை ?

இவ் வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டாததால் போன்மை மையங்களிலிருந்து இவ் வட்டங்களில் ஒன்றுக்கு வரையும் தொடுவரைகள், பொதுத் தொடுவரைகளாகும்.

இவ் வட்டங்களின் மையங்கள் (0, 0), (1, 3) ஆரைகள் 1,2. உள்போன்மை மையம் (0, 0), (1, 3) புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டினை உள்ளே 1 : 2 தகவுப்படி பிரிக்கும்.

$\therefore$ S_1-ன் ஆயத்தொலேகள்

$$\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 0}{1 + 2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 0}{1 + 2}\right)$$

(அ-து) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

வெளிபோன்மை மையம் S_2-ன் ஆயத்தொலேகள்

$$\left(\frac{1 \times 1 - 2 \times 0}{1 - 2}, \frac{1 \times 3 - 2 \times 0}{1 - 2}\right)$$

(அ-து) $(-1, -3)$

$\therefore$ குறுக்குப் பொதுத் தொடுவரைகள் S_1 லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளாகும்.

அவற்றின் சமன்பாடு

$$(x^2 + y^2 - 1)\left(\frac{1}{9} + 1 - 1\right) = \left(x \times \frac{1}{3} + y \times 1 - 1\right)^2$$

(அ-து) $x^2 + y^2 - 1 = (x + 3y - 3)^2$

(அ-து) $4y^2 + 3xy - 3x - 9y + 5 = 0$

(அ-து) $(y - 1)(3x + 4y - 5) = 0.$

S_2 லிருந்து வரையும் தொடுவரைகள் நேர் பொதுத் தொடுவரைகளாகும்.

அவற்றின் சமன்பாடு

$$(x^2 + y^2 - 1)(1 + 9 - 1) = (-x - 3y - 1)^2$$

(அ-து) $4x^2 - 3xy - x - 3y - 5 = 0$

(அ-து) $(x + 1)(4x - 3y - 5) = 0$

ஆகவே, நான்கு பொதுத் தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகள் $y - 1 = 0$; $3x + 4y - 5 = 0$; $x + 1 = 0$; $4x - 3y - 5 = 0$.

பயிற்சிகள் 11

1. $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$ வட்டமும், $5x - 2y - 10 = 0$ கோடும் வெட்டும் புள்ளிகள், (3, 1) புள்ளி இவற்றின் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு
$3x^2 + 3y^2 - 56x + 29y + 109 = 0$ என நிறுவுக.

2. $2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 17 = 0$ வட்டமும் $3x + 7 = 5y$ கோடும் வெட்டும் புள்ளிகள், (1, 1) புள்ளி இவற்றின் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

3. $2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகள், (2, 1) புள்ளி இவற்றின் வழிச் செல்லும் வட்டம் $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 7 = 0$ என நிறுவுக.

4. $x^2 + y^2 - 6 = 0$, $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள், (− 1, 1) இவற்றின் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

5. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் $2\sqrt{2}$ ஆரையுடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

6. $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 6 = 0$, $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 2 = 0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $x = y$ கோட்டில் இருந்தால் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

7. $x^2 + y^2 + 4x - 14y - 68 = 0$. $x^2 + y^2 - 6x - 22y + 30 = 0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழி x ஆயத்தைத் தொடும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் என்ன ?

8. $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகள் வழி, $2x - y + 3 = 0$ கோட்டினைத் தொடும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் என்ன ?

9. $x^2 + y = 4$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழி $x + 2y = 0$ கோட்டினைத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

10. $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ வட்டத்தை $2x - y + 6 = 0$ கோடு A, B-ல் வெட்டின் AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

11. $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + (y-b)^2 = b^2$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் யாது? பொது நாணின் நீளம் என்ன?

12. $2x + 3y = 1$ கோடு, $x^2 + y^2 = 4$ வட்டத்தினை A, B-ல் வெட்டின், AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y = 50$ என நிறுவுக.

13. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

14. $x^2 + y^2 + 4x + 22y = 0$, $x^2 + y^2 - 10x + 6y = 0$ வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளம் என்ன?

15. $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 + 0$, $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$ வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயத்தின் சமன்பாட்டினையும், பொது நாணினையும் காண்க.

16. $x^2 + y^2 + x + 2y + 3 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 7x - 8y - 9 = 0$ வட்டங்களின் சமதொடு வரை மையத்தைக் காண்க. இப் புள்ளியிலிருந்து வட்டந்தோறும் வரையும் தொடுவரையின் நீளம் என்ன?

17. $x^2 + y^2 + 4x + 7 = 0$, $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + y = 0$ வட்டங்களின் சமதொடுவரை மையத்தினைக் காண்க.

18. $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-b)^2 + y^2 = a^2$, $x^2+(y-c)^2=a^2$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - bx - cy + a^2 = 0$ என நிறுவுக.

19. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$, $(x-b)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $(x-a-b-c)^2 + y^2 = ab + c^2$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

20. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

21. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0, 2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0, x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

22. (2, 3), (5, 6) புள்ளிகளை மையமாகக் கொண்டு செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்ளும் சமவட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

23. $(0, a), (0, -a)$ வழி $y = mx + c$ கோட்டினைத் தொடும் வட்டமிரண்டின் சமன்பாடுகள் என்ன ? இவ் வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டினால் $c^2 = a^2 (2 + m^2)$ என நிறுவுக.

24. ஆதிவழி $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ வட்டத்தினைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் மையம் $x + y = 4$ கோட்டில் இருந்தால், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

25. $x^2 + y^2 + 2x + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டங்களில் எவை $y - x = 4$ கோட்டினைத் தொடும் ?

26. $x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்திலும் வெட்டி, $y - x = 4$ கோட்டினையும் தொடும் இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் என்ன ? இவ் வட்ட மையங்களின் இடைப்பட்ட தொலை $10\sqrt{2}$ என்று நிறுவுக.

27. $(\pm a, 0)$ புள்ளிகள் A, B ஆகும். AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தை, மாறும் தன்மையுடைய S வட்டம் செங்கோணத்தில் வெட்டினால், S வட்டத்தைச் சார்ந்த $(a, 0)$-ன் துணைக்கோடு ஒருநிலைப் புள்ளிவழிச் செல்லும் என நிறுவுக. அந் நிலைப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் யாவை ?

28. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டி $x = 2a$ கோட்டினைத் தொடும் வட்டங்களின் மையத்தின் இயங்கு வரை என்ன ?

29. $A\lambda + B\mu + c\gamma + D = 0$ ஆக $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \gamma = 0$ ஒருநிலை வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

30. $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டம் $\lambda S_1 + \mu S_2 + \gamma S_3 = 0$ ஒருநிலை வட்டமனைத்தையும் செங்கோணத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

31. S வட்டத்தைச் சார்ந்த P,Q புள்ளிகள் துணை இயப்புள்ளிகளாகின் PQ-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S-ஐ செங்கோணத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

32. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 45 = 0$-க்கு வரையும் தொடுவரைகளின் தகவு 3 : 4 ஆயின் அப் புள்ளியின் இயங்குவரை இவ் வட்டங்களோடும் பொது ஆயமுடைய வட்டமாகும் என நிறுவுக.

33. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$, $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ வட்டங்கள் தொடுமென நிறுவுக. தொடுகுத்தின் ஆயத்தொலைகள் என்ன ?

34. $x^2 + y^2 - 400 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 120=0$ வட்டங்கள் தம்முள் தொடுமென நிறுவுக. ஐ ஆயத்தையும் தொடுகுத்தில் இவ்வட்டங்களையும் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

35. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$ வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை ?

36. $x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y-10=0$ வட்டங்களில் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை ?

37. $(0, 0)$, (a, b) புள்ளிகளை எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + K(2ax + 2by - a^2 - b^2) = 0$ என்று நிறுவுக.

38. ஆதியை எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்ருகக் கொண்ட பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்களில் ஒன்று $x^2+y^2+2gx + 2fy + c = 0$ எனின், இவ் வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் ஒருநிலை வட்டங்களின் சமன்பாடு $(x^2 + y^2)(g + \mu f) + c(x + \mu y) = 0$ என நிறுவுக

39. இரு வட்டங்களைச் சார்ந்த P-ன் துணைக்கோடுகள் Q-ல் வெட்டின், இவ் வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம் PQ-ஐ சமபங்காகப் பிரிக்கும் என நிறுவுக.

40. ஒருநிலைப் புள்ளியிலிருந்து பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்கள் மூன்றுக்கு வரையும் தொடுவரைகள் t_1, t_2, t_3 ஆகும். இவ் வட்டங்களின் மையங்கள் முறையே P, Q, R எனின், $QR.\ t_1^2 + RP.\ t_2^2 + PQ.\ t_3^2 = 0$ என நிறுவுக.

41. பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்களைச் சார்ந்த ஒருநிலைப் புள்ளியிலிருந்து அதன் துணைக்கோட்டுக்கு வரையும் செங்கோட்டடியின் இயங்குவரை, சமதொடுவரையில் மைய முடைய ஒரு வட்டமென நிறுவுக.

42 பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்களில் இரண்டின் பொதுத் தொடுவரை எல்லைப் புள்ளியோடு கூடிச் செங்கோணத் தைப் பிறப்பிக்குமென நிறுவுக.

43. பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்களைச் சார்ந்த நிலைப்புள்ளி ஒன்றின் துணைக்கோடுகள் பிறிதொரு நிலைப்புள்ளி வழிச் செல்லும் எனவும், இப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை இந் நிலை வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம் சமபங்காமப் பிரிக் கும் எனவும், இக் கோடு எல்லைப் புள்ளிகளோடு கூடிச் செங் கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும் எனவும் நிறுவுக.

44. $x^3 + y^2 = a^2$ வட்டம், $lx + my + n = 0$ கோட்டில் மையமுடைய a ஆரை வட்டம், இவற்றின் எல்லைப் புள்ளிகள் $(x^2+y^2)\ (lx+my+n) + a^2\ (lx+my) = 0$ வளைவரையில் உள என நிறுவுக.

45. $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. இவ் வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகள் என்ன ?

46. $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ இவ் வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைச் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

47. $x^2+y^2-2x-6y+9 = 0$, $x^2+y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைச் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

48. ஒருநிலை வட்டத்தின் நாண்கள் ஒருநிலைப் புள்ளியிடத்து 90° பிறப்பிப்பின், அவற்றின் நடுப்புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டமெனவும், இவ்விரு வட்டங்களுக்கு அந்நிலைப் புள்ளி எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்று எனவும் நிறுவுக.

49. இரண்டு தொடர்பற்ற பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்களுள் ஒன்றின் சமதொடுவரையாயம், ஏனையதின் மையங்கள் வழிச் செல்லும் கோடாகும். இவையிரண்டிலிருந்தும் எடுத்த இரு வட்டங்கள் தம்முள் தொட்டால், அவற்றின் ஆரைகளின் பெருக்கத் தொகை மாறு ராசியென நிறுவுக.

50. இரு வட்டங்கள் A, B புள்ளிகளில் வெட்டும். A வழி ஒரு கோடு ஒரு வட்டத்தை P-லும், இக் கோட்டுக்கு ஒருபோகாக B வழி மற்றொரு கோடு ஏனைய வட்டத்தை Q-லும் வெட்டினால், PQ-வின் நடுப்புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன ?

6. கூம்பு வெட்டிகள்

(Conic Sections)

பரவளையம் (Parabola)

1. கூம்பு வெட்டிகள் (வரையறை) ஒருநிலைப் புள்ளி, ஒரு நிலைக் கோடு இவற்றிலிருந்து P-ன் தொலைகள் நிலைத்தகவுடையனவாக இருக்க, இயங்கும் P-ன் இயங்குவரை ஒரு கூம்பு வெட்டி (Conic Section) ஆகும். இந்த நிலைப்புள்ளி உயிர்ப் புள்ளி (Focus) எனவும், நிலைக்கோடு உயிர்க்கோடு (Directrix) எனவும், நிலைத்தகவு மையத் தொலைத்தகவு (Eccentricity) எனவும் கூறப்படும். உயிர்ப்புள்ளியை S என்ற எழுத்தாலும், மையத் தொலைத்தகவை e என்ற எழுத்தாலும் குறிப்பிடுவது மரபு.

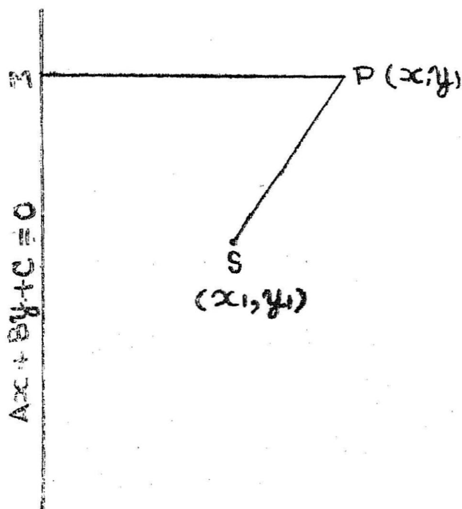
மையத் தொலைத்தகவு e, 1 ஆக இருந்தால், கூம்பு வெட்டி பரவளையம் (Parabola) எனவும், $e < 1$ என்றிருப்பின் நீள்வட்டம் (Ellipse) எனவும், $e > 1$ என்றிருப்பின் அதிபரவளையம் (Hyperbola) எனவும் கூறப்படும்.

2. ஒரு கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாகும். உயிர்ப்புள்ளி S (x_1, y_1) எனவும், உயிர்க்கோடு $Ax+By+C=0$ எனவும், மையத் தொலைத்தகவு e எனவும், P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x,y) எனவும், P-யிலிருந்து உயிர்க் கோட்டிற்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின் அடி M எனவும் கொள்க.

$$\text{இங்கு } \frac{SP}{PM} = e$$

$$(\text{அ-து}) \qquad SP^2 = e^2\, PM^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = e^2 \frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}$$



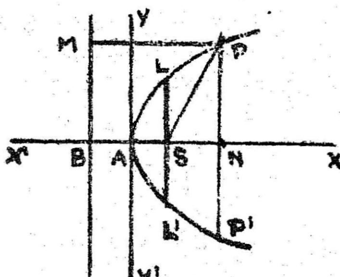
படம்-67

இச் சமன்பாட்டை விரித்தெழுதினால்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்பது போன்ற ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு P-ன் இயங்குவரையாகும்.

3. பரவளையத்தின் சமன்பாடு—உயிர்ப்புள்ளி S எனவும், உயிர்க்கோடு BM எனவும் பரவளையத்துப் புள்ளிகளுள் ஒன்று P எனவும் கொள்வோம்.



படம்-68

S-லிருந்து உயிர்க்கோட்டினுக்கு SB-ஐ நேர்குத்தாக வரைக. SB-ன் நடுப்புள்ளி A எனக் கொண்டால் $\frac{SA}{AB} = 1$. ஆகவே, A பரவளையத்தில் இருக்கும். P-ல் இருந்து உயிர்க் கோட்டினுக்கும் AS-க்கும் நிரலே PM, PN கோடுகளையும், A வழி AS-க்கு AY கோட்டினையும் நேர்குத்தாக வரைக.

$AS = a$ எனக் கொள்க.

AS, AY கோடுகளை x, y ஆயங்களாகக் கொள்ள S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$ ஆகும்.

P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$$SP^2 = (x_1 - a)^2 + y_1^2$$

$$MP = BN = x_1 + a$$

பரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு $e = 1$ ஆகையால்

$$\frac{SP}{PM} = 1$$

(அ-து) $SP^2 = MP^2$.

(அ-து) $(x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_1 + a)^2$

(அ-து) $y^2 = 4ax_1$

$\therefore$ P-ன் இயங்குவரை $\underline{y^2 = 4ax}$.

இது பரவளையத்தின் திட்டமான சமன்பாடு (Standard Equation) ஆகும்.

இச் சமன்பாடு பரவளையத்தின் $PN^2 = 4\ AS.AN$ வடிவ கணிதப் பண்பாகும். A புள்ளி பரவளையத்தின் முனை (Vertex) எனவும், AS-ன் நீட்சியான ASX ஆயம் (Axis) எனவும் கூறப்படும்.

4. $y^2 = 4ax$ பரவளையம் வரைதல் : x-ன் மதிப்புக் குறை யாக இருப்பின் y^2-ன் மதிப்பும் அவ்வாறே இருக்குமாதலின் x-ன் குறை மதிப்புகளுக்கு y-ன் மதிப்புகள் கற்பனை ஆகும். ஆகவே, இரண்டாவது, மூன்றாவது கால் வட்டங்களில் அஃதாவது A-ன் இடப் பக்கத்தில் வளைவரை இராது.

x-ன் மதிப்புச் சுன்னமெனின் y-ன் மதிப்பும் சுன்னமாகும். ஆகவே, வளைவரை x ஆயத்தை A-ல் வெட்டும்

x-ன் மதிப்பு எண்ணிலிக்குக் (Infinity) கூடிச் செல்லச் செல்ல y-ன் மதிப்பு அங்ஙனமாகும்.

வளைவரையிலுள்ள ஒவ்வொரு (x, y) புள்ளிக்கும் எதிர் நிலையாக $(x, -y)$ புள்ளி வளைவரையில் இருப்பதால் ஆயத்தோடு பரவளையம் சமச் சீருடையதாகும் (Symmetrical).

சமன்பாட்டில் 0 மதிப்பினை x-க்குக் கொடுத்தால் $y^2 = 0$. அதாவது y-க்கு 0, 0 மதிப்புகள் வருவதால் $x = 0$ கோடு வளைவரையை ஒரே புள்ளியான (0, 0). (0, 0) புள்ளிகளில் வெட்டும். ஆகவே, $x = 0$ கோடு பரவளையத்தை (0, 0) இடத்துத் தொடும்

x-க்குப் பல மதிப்புகளைக் கொடுத்து, அவற்றிற்கு நேர் நிலையான y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. இவற்றால் அறியும் பரவளையத்தின் உருவம் முற்பகுதி படத்தில் காண்க.

5. நேரகலம் (Latus Rectum) : PN-ன் நீட்சி வளைவரையை P′-ல் வெட்டினால் PN, P-ன் **குத்தாயம்** (Ordinate) எனவும், PNP′ P-ன் இரட்டைக் **குத்தாயம்** (Double Ordinate) எனவும் கூறப்படும்.

S வழிச் செல்லும் LSL′ இரட்டைக் குத்தாயம் **நேரகலம்** (Latus Rectum) எனப்படும்.

SL-ஐ l எனக் கொண்டால் L-ன் ஆயத்தொலைகள் (a, l)

L $y^2 = 4ax$-ல் இருப்பதால்,

$$l^2 = 4a^2$$

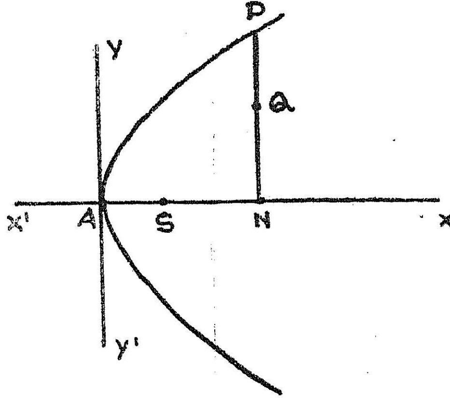
$$\therefore \quad SL = 2a$$

ஆகவே, நேரகலம் $= 4a$

6. பரவளையத்தின் ஆயத்தை x ஆயமாகவும், அதன் முனையிடத்துத் தொடுவரையை y ஆயமாகவும் கொண்டு அதன் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ என நிறுவினோம்.

பரவளையத்தின் உயிர்ப் புள்ளி : $(a, 0)$, முனை $(0, 0)$, ஆயம் $y = 0$, உயிர்க்கோடு $x + a = 0$ எனக் காணலாம்.

பரவளையத்தின் அகத்து Q புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொள்க.



படம்-69

Q-ன் குத்தாயமான NQ-ன் நீட்சி வளைவரையை P-ல் வெட்டினால்

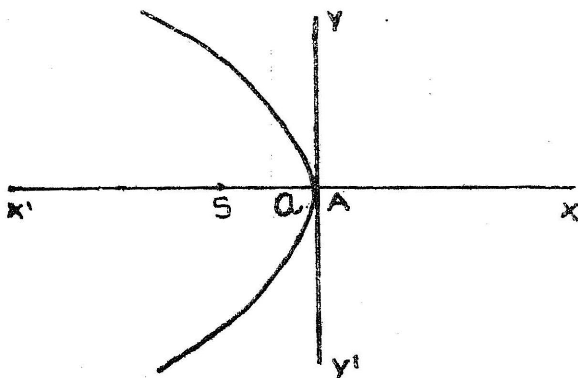
$$PN^2 = 4\,AS.\,AN$$
$$= 4ax_1$$
$$QN^2 < PN^2$$
$$< 4ax_1$$
$$\therefore \quad y_1^2 < 4ax_1$$

இம்மாதிரியே Q (x_1, y_1) புள்ளி பரவளையத்தின் புறத்திருப்பின் $y_1^2 > 4ax_1$ என நிறுவலாம். ஆகவே, பரவளையம் தளத்தினை (Plane) இருபாகமாகப் பிரிக்கும். ஒரு பாகத்தின் புள்ளிகளுக்கு $y^2 < 4ax$, மற்றப் பாகத்தின் புள்ளிகளுக்கு $y^2 > 4ax$, வளைவரையின் புள்ளிகளுக்கு $y^2 = 4ax$.

7. ஆயத்தினை x ஆயமாகவும், உயிர்க் கோட்டினை y ஆயமாகவும் கொள்ள, பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4a\,(x - a)$ ஆகும்.

ஆயத்தினை x ஆயமாகவும், உயிர்ப்புள்ளி S வழி ஆயத்துக்கு நேர்குத்தான கோட்டினை y ஆயமாகவும்

கொள்ளப் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4a(x + a)$. $y^2 = -4ax$ சமன்பாடு இப்படம் போல AX'-ஐ ஆயமாகக் கொண்ட பரவளையமாகும்.



படம் - 70

y ஆயத்தினை ஆயமாகவும், x ஆயத்தினை முனையிடத்துத் தொடு வரையாகவும், $4a$-ஐ நேரகலமாகவும் கொண்ட பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$x^2 = 4ay$ ஆகும்.

ஆகவே, l கோட்டிலிருந்து தொலையின் இருபடி, l-க்கு நேர்குத்தான l' கோட்டிலிருந்து தொலைக்குத் தக வேறுபட்டு இயங்கும் ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை, l கோட்டினை ஆயமாகவும் l' கோட்டினை முனையிடத்துத் தொடுவரை யாகவும் கொண்ட பரவளையமாகும்.

$(px + qy + r)^2 = K(qx - py + r')$ சமன்பாட்டினை

$$\left(\frac{px + qy + r}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right)^2 = \frac{K}{\sqrt{p^2 + q^2}}\left(\frac{qx - py + r'}{\sqrt{p^2 \quad q^2 +}}\right)$$ என்று

எழுதலாம்.

இச் சமன்பாடு ஒரு பரவளையத்தினைக் குறிக்கும். இப் பரவளை யத்தின் ஆயம் $px + qy + r = 0$, முனையிடத்துத் தொடுவரை $qx - py + r' = 0$, நேரகலத்தின் நீளம் $\frac{K}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ ஆகும்.

மாதிரி 1 :

(3, 4)-ஐ உயிர்ப் புள்ளியாகவும், $2x - 3y + 5 = 0$-ஐ உயிர்க் கோடாகவும் கொண்ட பரவளையத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

பரவளையத்தின் மையத் தொலைத்தகவு = 1

பரவளையத்துப் புள்ளிகளுள் ஒன்று P (x, y) எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{2x - 3y + 5)}{\sqrt{2^2 + 3^2}}\right)^2$$

(அ-து) $13(x-3)^2 + 13(y-4)^2 = (2x - 3y + 5)^2$

(அ-து) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 98x - 74y + 300 = 0.$

மாதிரி 2 :

$y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ பரவளையத்தின் முனை, உயிர்ப் புள்ளி, உயிர்க்கோடு இவற்றினைக் காண்க.

$y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

(அ-து) $y^2 - 6y + 9 - 2x - 4 = 0$

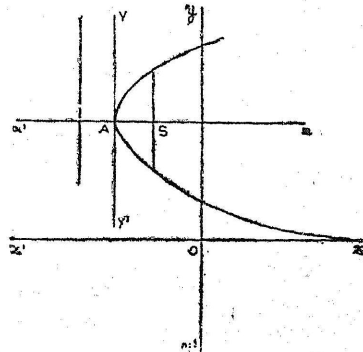
(அ-து) $(y-3)^2 = 2(x+2)$

$(-2, 3)$ புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றின், புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்துப் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $Y^2 = 2X$ ஆகும்.

$\therefore$ முனையின் ஆயத்தொலைகள் $(-2, 3)$

நேரகலம் = 2

$\therefore \quad AS = \frac{1}{2}$



படம் - 71

$\therefore$ S-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$

உயிர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x + \frac{5}{2} = 0.$

பயிற்சிகள் 12

1. $y^2 = ax + b$ ஒரு பரவளையத்தினைக் குறிக்குமென நிறுவுக. அதன் நேரகலம், உயிர்ப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

2. $y = ax^2 + 2bx + c$ ஒரு பரவளையத்தினைக் குறிக்குமென நிறுவுக. அதன் நேரகலம், உயிர்ப்புள்ளி, முனை, உயிர்க்கோட்டினைக் காண்க:

3. கீழ்க்கண்ட பரவளையங்களின் முனை, உயிர்ப்புள்ளி, உயிர்க்கோட்டினைக் காண்க:

(1) $4y = x^2 - 2x - 11$
(2) $y^2 = 8x + 9$
(3) $y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$
(4) $x^2 + 2y = 4x - 3$
(5) $x^2 - 4x - 5y - 1 = 0$
(6) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}(x + y - 1)^2.$

8. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தில் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரைச் சமன்பாடு.

$P(x_1, y_1)$ என்றும் அதற்கு மிக நெருங்கிய புள்ளி Q (x_2, y_2) என்றும் கொள்க.

PQ-ன் சமன்பாடு $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ... (1)

(x_1, y_1), (x_2, y_2) பரவளையத்தில் இருப்பதால்

$$y_1^2 = 4ax_1 \quad \text{... (2)}$$

$$y_2^2 = 4ax_2 \quad \text{... (3)}$$

(3)- ஐ (2)-லிருந்து கழித்தால்

$$y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$$

(அ-து) $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2}$

இம் மதிப்பை (1)ல் ஈடாக்கின் PQ-ன் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

Q, P யோடு நெருங்கி இறுதியில் அதனோடு ஒன்றுபடுவதால் $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ எனக் கொள்ள,

P இடத்துத் தொடுவரை கிடைக்கும்.

அதன் சமன்பாடு $y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1)$

(அ-து) $y_1 (y - y_1) = 2a(x - x_1)$

(அ-து) $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$

(அ-து) $yy_1 = 2ax + y_1^2 - 2ax_1$

$= 2ax + 4ax_1 - 2ax_1$, { (2) ஆல் }

$= 2a(x + x_1)$

∴ P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

கிளைத்தேற்றம் — (0, 0) இடத்துத் தொடுவரை

$$0 = 2a(x + 0)$$

(அ-து) $x = 0$.

(அ-து) y ஆயம்.

9. $y = mx + c$ கோடும் $y^2 = 4ax$ பரவளையமும் வெட்டும் புள்ளிகள்.

வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்று P எனக் கொள்வோம். கோடும் பரவளையமும் P வழிச் செல்வதால் P-ன் ஆயத் தொலைகள், கோடு, பரவளையத்துச் சமன்பாடுகளில் பொருந்த வேண்டும். ஆகவே, இவ்விரு சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் வரும் தீர்வுகள் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளாகும்.

$mx + c$-ஐ $y^2 = 4ax$ சமன்பாட்டில் y-க்கு ஈடாக்கின் $(mx + c)^2 = 4ax$

(அ-து) $m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0$

இது x-ல் இருபடிச் சமன்பாடு ஆதலின் இதற்கு இரு தீர்வுகள் உண்டு. அவற்றை x_1, x_2 எனக் கொள்க. x_1, x_2-ஐ $y = mx + c$-ல் ஈடு கொடுப்பின் இம் மதிப்புகளுக்கு எதிர் நிலையான மதிப்புகள் $mx_1 + c$, $mx_2 + c$.

ஆகவே, வெட்டும் புள்ளிகள் $(x_1, mx_1 + c)$, $(x_2, mx_2 + c)$.

10. $y = mx + c$ **கோடு** $y^2 = 4ax$ **பரவளையத்தைத் தொடுவதற்குரிய கட்டுப்பாடு.**

$$m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கோடும் பரவளையமும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள் என்று முற்பகுதியில் கண்டோம்

பரவளையத்தினை $y = mx + c$ தொடவே வெட்டும் இரு புள்ளிகளும் ஒன்றுபடும். அந் நிலையில் அவற்றின் ஆயத்தொலைகள் சமமாகும்.

எனவே, (1) சமன்பாட்டின் தீர்வுகளும் சமமாம்.

$$\therefore \quad 4(mc - 2a)^2 = 4c^2m^2$$

(அ-து) $4c^2m^2 - 16mca + 16a^2 = 4c^2m^2$

$$\therefore \quad c = \frac{a}{m}$$

$y = 4ax$ பரவளையத்தின் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$$y = mx + \frac{a}{m} \text{ ஆகும்.}$$

11. $y = mx + c$, $y^2 = 4ax$**-ஐத் தொட்டால் தொடுகுத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காணல்.**

$y = mx + c$ பரவளையத்தினை $P(x_1, y_1)$-ல் தொடும் எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ PT-ன் சமன்பாடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$.

$$2ax - yy_1 + 2ax_1 = 0$$

$$mx - y + c = 0$$

இவை ஒரே கோட்டின் சமன்பாடுகள்.

$$\therefore \quad \frac{2a}{m} = y_1 = \frac{2ax_1}{c}.$$

(அ-து) $y_1 = \frac{2a}{m}$, $x_1 = \frac{c}{m}$.

(x_1, y_1) பரவளையத்தில் இருப்பதால் $y_1^2 = 4ax_1$

ஆகவே, $\frac{4a^2}{m^2} = 4a \cdot \frac{c}{m}$

$$\therefore \quad c = \frac{a}{m}$$

$\therefore$ P-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

12. ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளையத்திற்கு இரு தொடு வரைகள் உண்டு என நிறுவுக.

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$, புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$y^2 = 4ax$-ன் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y = mx + \frac{a}{m} \text{ எனக் கண்டோம்.}$$

இது (x_1, y_1) வழிச் சென்றால் $y_1 = mx_1 + \dfrac{a}{m}$ (1)

(x_1, y_1) வழிச் செல்லும் தொடுவரைகளின் 'm'-கள் இச் சமன் பாட்டால் கிடைக்கும். (1) சமன்பாட்டை $m^2x_1 - my_1 + a = 0$ (2) என்று எழுதலாம். இது இருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால் m-க்கு இரு மதிப்புகள் வரும். ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் நேர்நிலையாக ஒரு தொடுவரை உண்டு. ஆகவே (x_1, y_1) வழி இரு தொடு வரைகள் உண்டு.

13. O (x_1, y_1)-லிருந்து $y^2 = 4ax$-க்கு வரையும் தொடு வரைகளின் சமன்பாடு.

(x_1, y_1) வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ என்று கொள்வோம்.

இக் கோடு பரவளையத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால் OP, OQ நீளங்களைப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் கணக் கிடலாம். $(y_1 + r\sin\theta)^2 = 4a(x_1 + r\cos\theta)$.

$$(\text{அ-து}) \quad \sin^2\theta . r^2 + 2(y_1 \sin\theta r - 2a\cos\theta)r + y_1^2 - 4ax_1 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

இந்தக் கோடு பரவளையத்தைத் தொட்டால் P, Q புள்ளிகள் ஒன்றுபடும். அந் நிலையில் OP, OQ நீளங்கள் சமமாகும்.

$\therefore$ (1) சமன்பாட்டுக்கு இரு சமத் தீர்வுகள் உண்டு.

$$\therefore \quad (y_1 \sin\theta - 2a\cos\theta)^2 = \sin^2\theta\,(y_1^2 - 4ax_1) \qquad (2)$$

இச் சமன்பாட்டினால் (x_1, y_1)-லிருந்து பரவளையத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் போக்கினைக் காணலாம்.

$\cos\theta$, $\sin\theta$-க்குப் பதில் நிரலே $\dfrac{x - x_1}{r}$, $\dfrac{y - y_1}{r}$-ஐ (2)-ல்

ஈடாக்கின், P-லிருந்து பரவளையத்துக்கு வரையும் தொடு வரைகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும். தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$$\{y_1(y-y_1)-2a(x-x_1)\}^2=(y-y_1)^2(y_1^2-4ax_1)$$

(அ-து) $\{yy_1-2ax-y_1^2+2ax_1\}^2=(y^2+y_1^2-2yy_1)(y_1^2-4ax_1)$

$$\{yy_1-2ax-2ax_1-(y_1^2-4ax_1)\}^2=\{y^2-4ax+y_1^2-4ax_1-2(yy_1-2a\,x+x_1)\}^2(y_1^2-4ax_1).$$

இங்கு, $T=yy_1-2a(x+x_1)$,

$$S=y^2-4ax,\ S_1=y_1^2-4ax_1$$

என்று கொண்டால், தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$(T-S_1)^2=(S+S_1-2T)S_1$,

(அ-து) $T^2=SS_1$.

மாதிரி 3 :

உயிர்க்கோட்டிலிருக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து பரவளையத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் இடைப்பட்ட கோணம் 90° என நிறுவுக.

உயிர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x+a=0$.

∴ உயிர்க்கோட்டிலிருக்கும் புள்ளி ஒன்றின் ஆயத்தொலைகளை $(-a, k)$ எனக் கொள்ளலாம். $(-a, k)$-லிருந்து பரவளையத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$SS_1=T^2$$

(அ-து) $(y^2-4ax)(k^2+4a^2)=\{yk-2a(x-a)\}^2$

(அ-து) $y^2(k^2+4a^2-k^2)+x^2(-4a^2)+\ldots\ldots=0.$

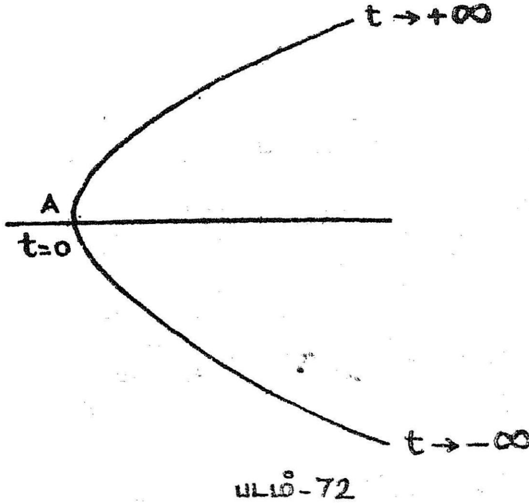
(அ-து) $4a^2y^2-4a^2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots=0.$

y^2-ன் கெழு + x^2-ன் கெழு = 0

∴ இக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணமாகும்.

14. பரவளையத்துப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $y^2=4ax$ சமன்பாட்டில் t-ன் அனைத்து மதிப்புக்கும் $x=at^2$, $y=2at$ பொருந்தும். ஆகவே, பரவளையத்துப் புள்ளியின் ஆயத்

தொலைகளை ஒரே மாறு ராசியான (variable) t-ஆல் குறிப்பிட இயலும். $(at^2, 2at)$ புள்ளியை 't' எனல் மரபு.



படம்-72

பரவளையத்தின் முனை $t = 0$

ஒரு புள்ளி பரவளையத்தின் மேற்பகுதியில் இருப்பின் t மிகையாகவும், கீழ்ப்பகுதியில் இருப்பின் t குறையாகவும் இருக்கும்.

15. 't' இடத்துத் தொடுவரை :

$y^2 = 4ax$-ன் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை $yy_1 = 2a(x + x_1)$ எனக் கண்டோம்.

இங்கு, $x_1 = at^2$, $y_1 = 2at$ எனக் கொண்டால் 't' இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு வரும்.

$\therefore$ 't' இடத்துத் தொடுவரை

$$y \cdot 2at = 2a(x + at^2)$$

(அ-து) $\underline{yt = x + at^2}$

't' இடத்துத் தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் $= \dfrac{1}{t}$

$\therefore$ t=தொடுவரை அச்சோடு பிறப்பிக்கும் கோணத்தின் எதிரிருக்கை யாகும் (Cotangent).

16. 't_1', 't_2' இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி.
't_1', 't_2' இடத்துத் தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகள் நிரலே $yt_1 = x + at_1^2$

$yt_2 = x + at_2^2$ ஆகும்.

இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$$x = at_1t_2,\ y = a(t_1 + t_2)$$

$\therefore$ வெட்டும் புள்ளி $\{ at_1 t_2, a(t_1 + t_2) \}$

17. 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண்.
$(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ புள்ளிகளை இணைக்குங்கோடு

$$\frac{y - 2at_1}{2at_1 - 2at_2} = \frac{x - at_1^2}{at_1^2 - at_2^2}$$

(அ-து) $$\frac{y - 2at_1}{2a(t_1 - t_2)} = \frac{x - at_1^2}{a(t_1 + t_2)(t_1 - t_2)}$$

$a(t_1 - t_2)$ சினையை (Factor) அகற்றினல் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - 2at_1}{2} = \frac{x - at_1^2}{t_1 + t_2}$$

(அ-து) $(y - 2at_1)(t_1 + t_2) = 2(x - at_1^2)$

(அ-து) $\underline{y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1 t_2}$

't_1' 't_2' புள்ளிகள் 't' புள்ளியிடத்து ஒன்றுபட்டால் இந் நாண் 't' இடத்துத் தொடுவரையாகும். ஆகவே, இச் சமன்பாட்டில் t_1, t_2-க்குப் பதில் t-ஐ ஈடாக்கினல் 't' இடத்துக் தொடுவரையின் சமன்பாடு.

$$yt = x + at^2.$$

18. 't' இடத்துச் செங்கோடு.
't' இடத்துச் செங்கோடு $(at^2, 2at)$ வழி 't' இடத்துத் தொடுவரைக்கு நேர்குத்தாகும்.

't' இடத்துத் தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் $= \frac{1}{t}$

$\therefore$ 't' இடத்துச் செங்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= -t$

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 2at = -t(x - at^2)$$

(அ-து) $\underline{y + tx = 2at + at^3}$

19. 't_1', 't_2' இடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி.
't_1' 't_2' இடத்துச் செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் நிரலே

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3$$ ஆகும்.

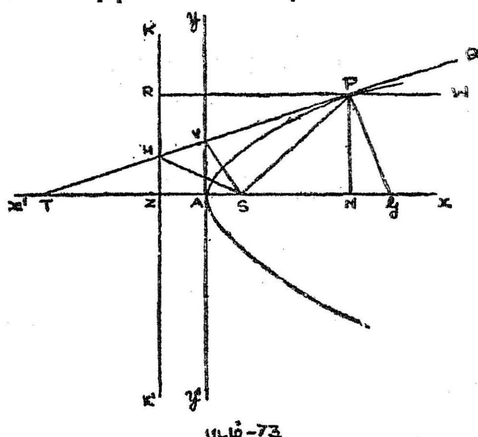
இச் சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின்

$$x = 2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2),\ y = -at_1t_2(t_1 + t_2)$$

∴ செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$\{2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2),\ -at_1t_2(t_1 + t_2)\}.$$

20. **பரவளையத்தின் சில பண்புகள்:**



படம்-73

இப் படத்தில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$y^2 = 4ax$ எனக் கொள்வோம்

Ax, Ay x, y ஆயங்களாகும்.

பரவளையத்தின் முனை A, முனையிடத்துத் தொடுவரை Ay, உயிர்ப்புள்ளி S $(a, 0)$, உயிர்க்கோடு KK′ $x + a = 0$ ஆகும்.

PR = SP (வரையறை)

பரவளையத்து P-ன் ஆயத்தொலைகள் $(at^2, 2at)$.

1. TA = AN.

P இடத்துத் தொடுவரை $yt = x + at^2$.

T இடத்து $y = 0$, $x = \text{AT} = -at^2$

∴ TA = AN.

ஆகவே, P-ன் அடித்தொடுவரையை (Sub-tangent) A சமமாகப் பிரிக்கும்.

2. ST = SP

ST = SA + AT

$= a + at^2$

$= a(1 + t^2)$

$$SP = \sqrt{(at^2 - a)^2 + (2at)^2}$$
$$= a(1 + t^2)$$
$$\therefore ST = SP.$$

3. TP-க்கு SV நேர்குத்தாகும்.

இக் கோடு $x = 0$ கோட்டினை வெட்டும் இடத்து $yt = at^2$.

(அ-து) $y = at$.

$\therefore$ V-ன் ஆயத்தொலைகள் $(0, at)$

SV-ன் சமன்பாடு $\frac{y - at}{0 - at} = \frac{x - 0}{a - 0}$.

(அ-து) $y = -xt + at$.

$\therefore$ SV-ன் சாய்வு வீதம் $= -t$.

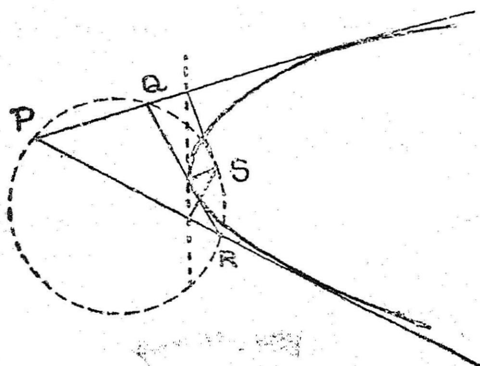
TP-ன் சாய்வு வீதம் $= \frac{1}{t}$.

$\therefore$ இவ்விரு கோடுகளின் சாய்வு வீதப் பெருக்கத் தொகை

$$= -t\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$= -1$$

$\therefore$ TP-யும் SV-யும் தம்முள் நேர்குத்தான கோடுகளாகும். ஆகவே, S-லிருந்து பரவளையத்தின் தொடுவரைக்கு நேர்குத்துக் கோடு வரையின், அதன் அடி முனையிடத்துத் தொடுவரையில் இருக்கும்.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் பரவளையத்தைத் தொட்டால் அதன் சுற்றுவட்டம் உயிர்ப்புள்ளி வழிச் செல்லும்.



படம்-74

S-லிருந்து தொடுவரைகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் முனையிடத்துத் தொடுவரையில் இருக்கும்.

S-லிருந்து PQ, QR, RP-க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு களின் அடிகள் ஒரே கோட்டில் இருத்தலின் PQR-ன் சுற்று வட்டம் S வழிச் செல்லும் செவ்வடிக் கோட்டுத் தோற்றத்தின் தலைமாற்று (Converse of Pedal Line Theorem).

5. $S\hat{P}T = Q\hat{P}W.$

$SP = ST$ என்று நிறுவினோம்.

$\therefore \quad S\hat{P}T = S\hat{T}P = Q\hat{P}W.$

6. $P\hat{S}H = 90°$

H-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{-a, \dfrac{a(t^2-1)}{t}\right\}$

S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$

$\therefore$ HS-ன் சாய்வு வீதம் $m_1 = \dfrac{a(t^2-1)}{t(-a-a)}$

$$= \frac{1-t^2}{2t}$$

P-ன் ஆயத் தொலைகள் $(at^2, 2at)$

SP-ன் சாய்வு வீதம் $m_2 = \dfrac{2at}{at^2-a} = \dfrac{2t}{t^2-1}$

$$\therefore \quad m_1 m_2 = \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{2t}{t^2-1}$$

$$= -1$$

$\therefore \quad P\hat{S}H = 90°.$

7. $SV^2 = AS.SP$

PSV, SVA முக்கோணங்களில்

$S\hat{V}P = V\hat{A}S$ (ஒவ்வொரு கோணமும் 90°)

$S\hat{P}V = A\hat{V}S$ $(S\hat{P}V = S\hat{T}P = 90° - A\hat{V}T = A\hat{V}S)$

$\therefore$ PSV, SVA வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.

$\therefore$ $SV^2 = AS.\ SP.$

8. அடிச்செங்கோடு (Sub-normal) மாருத்தன்மையது.

PG-ன் சமன்பாடு $y + tx = 2at + at^3.$

$\therefore$ G-ன் ஆயத்தொலைகள் $(2a + at^2, 0)$

அடிச்செங்கோடு $NG = AG - AN$

$= 2a + at^2 - at^2$

$= 2a$

$=$ பாதி நேரகலம்

9. $SG = SP$

$SG = AG - AS$

$= 2a + at^2 - a = a(1 + t^2)$

$SP = a(1 + t^2)$ (பண்பு 2)

$\therefore \quad SG = SP.$

10. தம்முள் நேர்குத்தான தொடுவரைகள் உயிர்க்கோட்டில் வெட்டும்.

't'$_1$, 't'$_2$ இடத்துத் தொடுவரைகள்

$yt_1 = x + at_1^2$

$yt_2 = x + at_2^2$

இவை தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பின் $\frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{t_2} = -1$

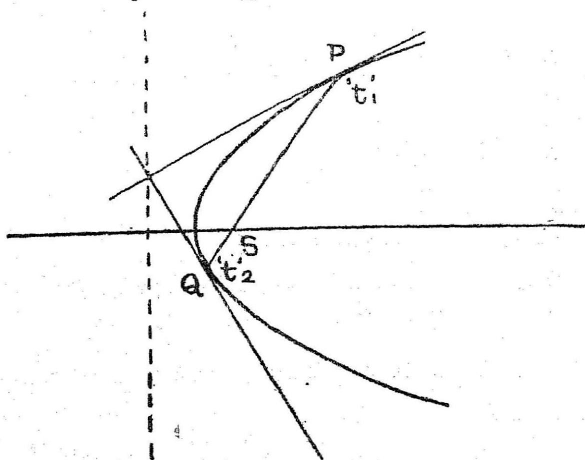
(அ-து) $t_1 t_2 = -1$

தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி $\{ at_1t_2, a(t_1 + t_2) \}$

(அ-து) $\{ -a, a(t_1 + t_2) \}$.

இப் புள்ளி $x + a = 0$ (அ-து) உயிர்க்கோட்டில் இருக்கும்.

11. உயிர் நாண் (Focal Chord) நுனிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் உயிர்க்கோட்டில் வெட்டும்.



படம் -75

உயிர் நாண் PSQ என்க. P, Q புள்ளிகளை 't_1', 't_2' எனக் கொண்டால், PQ-ன் சமன்பாடு

$$y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1 t_2.$$

S, PQ-ல் இருப்பதால்

$$0 = 2a + 2at_1 t_2$$

$$\therefore \quad t_1 t_2 = -1$$

P, Q இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி

$$\{ at_1 t_2, a(t_1 + t_2) \}.$$

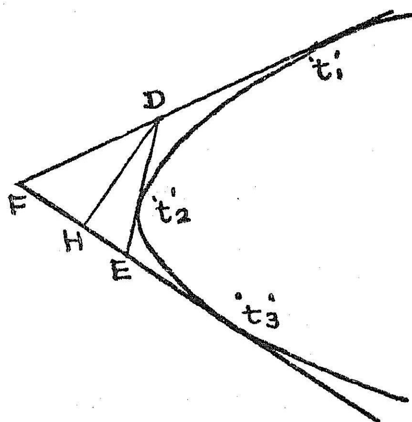
(அ-து) $\{ -a, a(t_1 + t_2) \}$

இப் புள்ளி $x + a = 0$-ல் இருக்கும்.

∴ வெட்டும் புள்ளி உயிர்க்கோட்டில் உள்ளது.

12. பரவளையத்தின் மூன்று தொடுவரைகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் உயிர்க்கோட்டில் இருக்கும் (Steiner's theorem).

't_1', 't_2', 't_3' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளால் அமைந்த முக்கோணம் DEF எனக் கொள்க.



படம்-76

D-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$\{ at_1 t_2, a(t_1 + t_2) \}$$

EF-ன் சமன்பாடு $yt_3 = x + at_3^2$

$$\therefore \quad \text{EF-ன் } 'm' = \frac{1}{t_3}$$

∴ D-லிருந்து EF-க்கு வரையும் DH நேர்குத்துக் கோட்டின் 'm' $= -t_3$

∴ DH-ன் சமன்பாடு

$$y - a(t_1 + t_2) = -t_3(x - at_1 t_2)$$

(அ-து) $y + t_3 x = a(t_1 + t_2) + at_1 t_2 t_3$ ...(1)

இம் மாதிரியே F-லிருந்து DE-க்கு வரையும் நேர் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு

$y + t_2 x = a(t_3 + t_1) + at_1 t_2 t_3$ ...(2)

(1), (2) கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி செங்கோட்டு மைய மாகும்.

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்,

$x = -a, y = a(t_1 + t_2 + t_3) + at_1 t_2 t_3.$

∴ செங்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்

$$[-a, a(t_1 + t_2 + t_3) + at_1 t_2 t_3]$$

ஆகவே, செங்கோட்டு மையம் $x + a = 0$ கோட்டில், அஃதாவது உயிர்க்கோட்டில் இருக்கும்.

மாதிரி 4

S வழிச் செல்லும் நாண் P இடத்துத் தொடுவரைக்கு ஒருபோகாக இருப்பின் நாணின் நீளம் 4 SP என நிறுவுக.

P புள்ளி 't' எனவும் P இடத்துத் தொடுவரைக்கு ஒரு போகான Sவழி நாண் QR எனவும், Q, R புள்ளிகள் 't_1', 't_2' எனவும் கொள்க.

QR-ன் சமன்பாடு

$$y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1 t_2$$

QR, S வழிச் செல்வதால்

$$2a + 2at_1 t_2 = 0$$

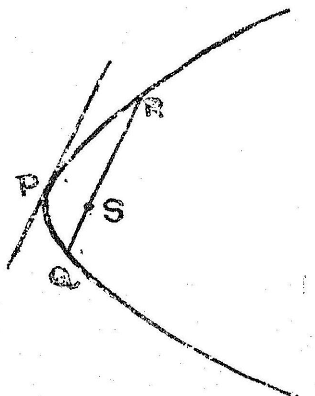
(அ-து) $t_1 t_2 = -1$ ...(1)

P இடத்துத் தொடுவரை

$$yt = x + at^2$$

இக்கோடு QR-க்கு ஒருபோகு ஆகையால்

$\dfrac{1}{t} = \dfrac{2}{t_1 + t_2}$ ...



படம்-77

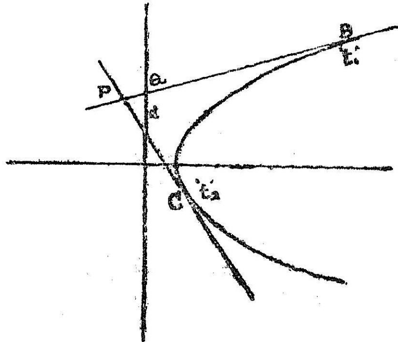
$$SP^2 = (a - at^2)^2 + (2at)^2$$
$$= a^2(1 + t^2)^2$$
$$QR^2 = (at_1^2 - at_2^2)^2 + (2at_1 - 2at_2)^2$$
$$= a^2(t_1 - t_2)^2(t_1 + t_2)^2 + 4a^2(t_1 - t_2)^2$$
$$= a^2(t_1 - t_2)^2 \{(t_1 + t_2)^2 + 4\}$$
$$= a^2\{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2\}\{(t_1 + t_2)^2 + 4\}$$

(2)-லிருந்து $t_1 + t_2 = 2t$, (1)-லிருந்து $t_1t_2 = -1$. இம் மதிப்புகளை QR^2-ல் ஈடாக்கின்

$$QR^2 = a^2 \{4t^2 + 4\}\{4t^2 + 4\}$$
$$= 16a^2(t^2 + 1)^2$$
$$= 16\, SP^2$$
$$\therefore \quad QR = 4\, SP.$$

மாதிரி 5

உயிர்க்கோட்டில் d நீளம் வெட்டும் தொடுவரைகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை $(y^2 - 4ax)(x + a)^2 = d^2x^2$ என நிறுவுக.



படம்-78

அத்தகைய தொடுவரைகள் PB, PC எனவும், B, C புள்ளிகள் 't_1', 't_2', P புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்க.

$$\therefore \quad x_1 = at_1t_2 \qquad \ldots(1)$$
$$y_1 = a(t_1 + t_2) \qquad \ldots(2)$$

PB-ன் சமன்பாடு $yt_1 = x + at_1^2$

$\therefore$ Q-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{-a, \frac{a(t_1^2-1)}{t_1}\right\}$

இவ்வாறே R-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{-a, \frac{a(t_2^2-1)}{t_2}\right\}$

$$\therefore \quad d = \frac{a(t_1^2-1)}{t_1} - \frac{a(t_2^2-1)}{t_2}$$

(அ-து) $d\,t_1 t_2 = a(t_1^2 t_2 - t_2 - t_1 t_2^2 + t_1)$

$= a(t_1 - t_2)(1 + t_1 t_2).$ (3)

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து t_1, t_2-ஐ அகற்றுக.

$$d^2 t_1^2 t_2^2 = a^2 (t_1 - t_2)^2 (1 + t_1 t_2)^2.$$

(அ-து) $\frac{d^2 x_1^2}{a^2} = a^2 \{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2\} (1 + t_1 t_2)^2$

$$= a^2 \left\{\frac{y_1^2}{a^2} - \frac{4x_1}{a}\right\} \left\{1 + \frac{x_1}{a}\right\}^2.$$

(அ-து) $d^2 x_1^2 = (y_1^2 - 4ax_1)(x_1 + a)^2.$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $d^2 x^2 = (y^2 - 4ax)(x + a)^2$.

மாதிரி 6

$y^2 = 4ax$ பரவளையத்திற்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் இடைப்பட்ட கோணம் மாறாத் தன்மையதான α எனின், புள்ளியின் இயங்குவரை $y^2 - 4ax = \tan^2 \alpha . (x + a)^2$ என நிறுவுக.

முதல் முறை—

புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்க. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y = mx + \frac{a}{m} \text{ எனக் கண்டோம்.}$$

இக்கோடு (x_1, y_1) வழிச் சென்றால்

$$y_1 = mx_1 + \frac{a}{m}$$

(அ-து) $x_1 m^2 - y_1 m + a = 0$ ...(1)

(x_1, y_1)-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் 'm'களை (1) சமன்பாட்டாற் காணலாம்.

அவை m_1, m_2 எனின், $m_1 + m_2 = \frac{y_1}{x_1}$, $m_1 m_2 = \frac{a}{x_1}$.

தொடுவரைகளின் இடைப்பட்ட கோணம் a ஆகையால்

$$\tan a = \frac{m_1 \sim m_2}{(1 + m_1 m_2)}$$ Squaring both sides.

$$\tan^2 a = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(1 + m_1 m_2)^2}$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}{(1 + m_1 m_2)^2}$$

$$= \frac{\frac{y_1^2}{x_1^2} - \frac{4a}{x_1}}{\left(1 + \frac{a}{x_1}\right)}$$

$$= \frac{y_1^2 - 4ax_1}{(x_1 + a)^2}$$

(அ-து) $y_1^2 - 4ax_1 = \tan^2 a\ (x_1 + a)^2$.

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவரை

$$y^2 - 4ax = \tan^2 a\ (x + a)^2.$$

இரண்டாவது முறை—

புள்ளியின் ஆ்புத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனவும் (x_1, y_1) லிருந்து வரையும் தொடுவரைகள் பரவளையத்தை 't_1',-'t_2',-ல் தொடுமெனவும் கொள்க.

$$\therefore \quad x_1 = at_1 t_2 \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$y_1 = a(t_1 + t_2) \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

't_1' இடத்துத் தொடுவரை $yt_1 = x + at_1^2$

't_2' ,, $yt_2 = x + at_2^2$

இத்தொடு வரைகள் இடைப்பட்ட கோணம் a

$$\therefore \quad \tan a = \frac{\frac{1}{t_1} \sim \frac{1}{t_2}}{1 + \frac{1}{t_1 t_2}} \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து t_1, t_2-ஐ அகற்றுக.

$$\tan^2 a = \frac{(t_2 - t_1)^2}{(1 + t_1 t_2)^2}$$

$$= \frac{(t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2}{(1 + t_1 t_2)^2}$$

$$= \frac{\frac{y_1^2}{a^2} - \frac{4x_1}{a}}{\left(1 + \frac{x_1}{a}\right)^2}$$

(அ-து) $(x_1 + a)^2 \tan^2 a = y_1^2 - 4ax_1$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$(x + a)^2 \tan^2 a = y^2 - 4ax.$

$a = 90°$ எனின் $(x + a)^2 = \cot^2 90° (y^2 - 4ax) = 0.$

(அ-து) $\qquad x + a = 0.$

மாதிரி 7

$y^2 = 4ax$ பரவளையத்தில் தம்முள் நேர்குத்தான செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரைச் சமன்பாடு என்ன ?

அத்தகைய செங்கோடுகளின் அடிகள் 't_1', 't_2', எனவும் அவை வெட்டும் புள்ளி x_1 y_1 எனவும் கொள்க.

't_1', 't_2' இடத்துச் செங்கோடுகள்

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3$$
$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3$$

இவை வெட்டும் புள்ளி

$$\{2a + a(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2), -at_1 t_2 (t_1 + t_2)\}$$

$\therefore$ $x_1 = 2a + a(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)$ ...... (1)

$y_1 = -at_1 t_2 (t_1 + t_2)$ ...... (2)

செங்கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாகையால்

$$(-t_1)(-t_2) = -1$$

(அ-து) $t_1 t_2 = -1$ ...... (3)

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து t_1, t_2-ஐ அகற்றுக.

$$x_1 = 2a + a(t_1^2 - 1 + t_2^2)$$
$$= a(t_1^2 + t_2^2) + a.$$
$$y_1 = a(t_1 + t_2)$$
$$t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1t_2$$
$$= (t_1 + t_2)^2 + 2$$

(அ-து) $\dfrac{x_1 - a}{a} = \dfrac{y_1^2}{a^2} + 2$

(அ-து) $a(x_1 - a) = y_1^2 + 2a^2$

(அ-து) $y_1^2 = a(x_1 - 3a)$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$y^2 = a(x - 3a).$$

மாதிரி 8

ஒரு பரவளையத்தின் PQ நாண் நிலைத்த போக்குடையதாயின் P, Q இடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை பரவளையத்தின் ஒரு செங்கோடாகும் என நிறுவுக.

P, Q புள்ளிகள் 't_1', 't_2' என்றும், ஆங்கு செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

$$x_1 = 2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) \quad \text{......} \quad (1)$$
$$y_1 = -at_1t_2(t_1 + t_2). \quad \text{......} \quad (2)$$

PQ-ன் சமன்பாடு

$$y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2.$$

PQ-ன் போக்கு நிலைத்ததாகையால்

$$\frac{2}{t_1 + t_2} = \text{நிலையெண்}$$

இந் நிலையெண்ணை K எனக்கொண்டால்

$$\frac{2}{t_1 + t_2} = K \quad \text{......} \quad (1)$$

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து t_1, t_2-ஐ அகற்றுக.

$$x_1 = 2a + a\{(t_1 + t_2)^2 - t_1t_2\}$$
$$= 2a + a\left\{\left(\frac{2}{K}\right)^2 - t_1t_2\right\}$$

$$\therefore \quad at_1t_2 = 2a + \frac{4a}{K^2} - x_1$$

$$y_1 = -at_1t_2(t_1+t_2)$$

$$= \left(-2a - \frac{4a}{K^2} + x_1\right)\frac{2}{K}$$

(அ-து) $y_1 + \left(-\frac{2}{K}\right)x_1 = 2a\left(-\frac{2}{K}\right) + a\left(-\frac{2}{K}\right)^3.$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$y + \left(-\frac{2}{K}\right)x = 2a\left(-\frac{2}{K}\right) + a\left(-\frac{2}{K}\right)^3.$$

இங்கு $-\frac{2}{K}$ க்குப் பதில் T-ஐ ஈடாக்கின்

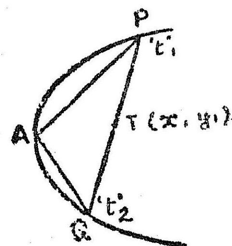
$y + Tx = 2aT + aT^3$ என்று வரும். இக்கோடு $(aT^2, 2aT)$ இடத்துப் பரவளையத்தின் செங்கோடாகும்.

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை பரவளையத்தின் ஒரு செங்கோடாகும்.

மாதிரி 9

பரவளையத்தின் முனையிடத்துச் செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் இயங்குவரையினைக் காண்க. இந்நாண்களனைத்தும் பரவளையத்தின் ஆயத்தில் ஒருநிலைப் புள்ளி வழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

முனையிடத்துச் செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் நாண்களில் ஒன்று PQ என்றும், P,Q புள்ளிகள், 't_1', 't_2' என்றும் கொள்க. PQ-ன் நடுப்புள்ளி T (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.



படம் 79

$$x_1 = \frac{at_1^2 + at_2^2}{2} = \frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$y_1 = \frac{2at_1 + 2at_2}{2} = a(t_1 + t_2) \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

AP-ன் சாய்வு வீதம் $\frac{2}{t_1}$, AQ-ன் சாய்வு வீதம் $= \frac{2}{t_2}$

$P\hat{A}Q = 90° \therefore \frac{4}{t_1 t_2} = -1.$

(அ-து) $t_1 t_2 = -4$ ...(3)

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளில் t_1, t_2 ஐ அகற்றுக.

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{2x_1}{a}.$$

$$t_1 + t_2 = \frac{y_1}{a}.$$

$$2t_1 t_2 = (t_1 + t_2)^2 - (t_1^2 + t_2^2)$$

$$-8 = \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{2x_1}{a}$$

$$y_1^2 = 2x_1 a - 8a^2$$
$$= 2a(x_1 - 4a)$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$y^2 = 2a(x - 4a)$$

இது $(4a, 0)$-ஐ உயிர்புள்ளியாகவும், $2a$-ஐ நேரகலமாகவும் கொண்ட ஒரு பரவளையமாகும். PQ-ன் சமன்பாடு $y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1 t_2$; $t_1 t_2 = -4$ $\therefore$ PQ-ன் சமன்பாடு

$$y(t_1 + t_2) = 2x - 8a.$$

இக் கோடு $(4a, 0)$ புள்ளிவழிச் செல்லும்.

பயிற்சிகள் 13

1. $y^2 = 4x$ பரவளையத்தில் $(1, -2)$ இடத்துத் தொடுவரை $(-2, 1)$ புள்ளிவழச் செல்லுமென நிறுவுக. $(-2, 1)$-லிருந்து பரவளையத்துக்கு வரையும் ஏனைய தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

2. ஒரு பரவளையத்தில், ஆயம், தொடுகுத்து இவற்றின் இடைப்பட்ட தொடுவரைப் பகுதியை முனையிடத்துத் தொடுவரை இரு சமமாகப் பிரிக்குமென நிறுவுக.

3. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தில் உயிர் நாண் (Focal Chord) ஒன்றின் நுனிகள் (x_1, y_1) (x_2, y_2) எனின் $x_1 x_2 = a^2$, $y_1 y_2 = -4a^2$ என நிறுவுக.

4. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தில் நிரலே 60°, 45°, 30° ஆயத்தோடு சாய்ந்திருக்கும் தொடுவரைகளின் தொடுகுத்துகளுக்கு ஆயத்தொலைகள் யாவை? வீதக் கோவைகளாக (Geometric progression) இம் முப்புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகளும், y ஆயத்தொலைகளும் இருக்குமென நிறுவுக.

5. நேரகல நீட்சியில் வெட்டிய இரு தொடுவரைகள் ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் நிரப்புங் கோணங்களாகும் என நிறுவுக.

6. பரவளையத்து மிகைப்பகுதியில் P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் ஆயத்தோடு 30°, 60° பிறப்பித்தால், ஆயமும் உயிர்க்கோடும் வெட்டும் புள்ளி வழி PQ செல்லுமென நிறுவுக.

7. (5, 13) புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 5x$ பரவளையத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு என்ன?

8. $y = mx + c$ கோடு $y^2 = 4a(x + a)$ பரவளையத்தைத் தொடுதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன?

9. $y^2 = 4a(x + a)$, $y^2 = 4a_1(x + a_1)$ பரவளையங்களுக்கு P-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகள் தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பின், P-ன் இயங்குவரை ஒரு கோடெனை நிறுவுக.

10. $y^2 = 8x$ பரவளையத்தின் P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (18, 12)-ல் வெட்டின் P, Q புள்ளிகளைக் காண்க.

11. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் (x_1, y_1) (x_2, y_2) இடத்துச் செங்கோடுகள் (x_3, y_3) வழிச் சென்றால்

$$x_3 = 2a + \frac{y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2}{4a}, \; y_3 = -y_1y_2\,\frac{y_1 + y_2}{8a^2}$$

என நிறுவுக.

12. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் இரு புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் (x_1, y_1) புள்ளியில் வெட்டின், அப் புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் $\left(2a - x_1 + \frac{y_1^2}{a}, -\frac{x_1y_1}{a}\right)$ புள்ளியில் வெட்டுமென நிறுவுக.

13. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் 't_1' இடத்துச் செங்கோடு பரவளையத்தை $(at_2^2, 2at_2)$ புள்ளியில் மீண்டும் வெட்டின் $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$ என நிறுவுக.

14. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் P இடத்துச் செங்கோடு பரவளையத்தை மீண்டும் Q-ல் வெட்டுகிறது. P, PQ-ன் நடுப் புள்ளி இவற்றின் குத்தாயங்கள் நிரலே y_1, y_2 எனின் $y_1y_2 = -4a^2$ என நிறுவுக.

15. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் நேரகல நுனியிடத்துச் செங்கோட்டு நாணின் நீளம் $8a\sqrt{2}$ என நிறுவுக.

16. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் $4a$, x ஆயத்தொலையுடைய P இடத்துத் தொடுவரை ஆயத்தினை T லும் P இடத்துச் செங்கோடு மீண்டும் பரவளையத்தை Q-லும் வெட்டின், PT : PQ 4 : 5 என நிறுவுக.

17. பரவளையத்துச் செங்கோடு ஆயத்தோடு ϕ கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின், அது பரவளையத்தை மீண்டும் வெட்டுங் கோணம் $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan\phi)$ என நிறுவுக

18. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்து P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு வளைவரையை மீண்டும் Q-ல் வெட்டுகிறது. PQ-யும் Q இடத்துச் செங்கோடும் பரவளைய ஆயத்தோடு நிரலே θ, ϕ கோணங்களைப் பிறப்பிப்பின் $\tan\theta\tan\phi + \tan^2\theta + 2 = 0$ என நிறுவுக.

19. ஒரு பரவளையத்தில் Q, R புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் P-ல் வெட்டின் $PQ^2 : PR^2 = SQ : SR$ என நிறுவுக.

20. பரவளையத்தின் P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் T-ல் வெட்டுகின்றன. P, T, Q புள்ளிகளிலிருந்து பரவளையத் தொடுவரை ஒன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் நிரலே p_1, p_2, p_3 எனின் $p_1p_3 = p_2^2$ என நிறுவுக.

21. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்து நாற்புள்ளிகளுள் இரண்டின் குத்தாயங்களின் கூட்டுத்தொகை ஏனை இரண்டின் குத்தாயங்களின் கூட்டுத்தொகையாக இருப்பின், முதலிரு புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடும் பின்னைய இரு புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடும் ஒருபோகானவை யென நிறுவுக.

22. ஒரு பரவளையத்தில் S உயிர்ப்புள்ளி, X உயிர்க்கோடு ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளி, PP' ஓர் இரட்டைக் குத்தாயம், PX வளைவரையை மீண்டும் Q-ல் வெட்டின் P' Q, S வழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

23. ஒரு பரவளையத்தில் வரையப்பட்ட நாற்சிறையின் மூன்று பக்கங்கள் ஆயத்தில் நிலைப்புள்ளிகள் வழிச் சென்றால், அதன் எஞ்சிய பக்கமும் ஆயத்தில் ஒரு நிலைப்புள்ளி வழியேதான் செல்லுமென நிறுவுக.

24. $lx + my + n = 0$ கோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தை P, Q புள்ளிகளிலும், P, Q புள்ளிகளை $(c,0)$-ஓடு இணைத்து நீட்ட அவை மீண்டும் பரவளையத்தை R, S புள்ளிகளிலும் வெட்டின் RS ன் சமன்பாடு $nx - mcy + lc^2 = 0$ என நிறுவுக. PQ ஒரு நிலைப்புள்ளி வழிச் சென்றால் RS-ம் ஒரு நிலைப்புள்ளி வழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

25. $y^2 + 4bx = 0$ பரவளையத் தொடுவரை ஒன்று $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தை P, Q-ல் வெட்டின், PQ ன் நடுப்புள்ளி யியங்கு வரை $y^2 (2a + b) = 4a^2x$ என நிறுவுக

26. உயிர்க்கோட்டிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளையம் வரையும் தொடுவரைகளின் நடுப்புள்ளிகள் இயங்குவரை $y^2 (2x + a) = a (3x + a)^2$ என நிறுவுக.

27. $\text{Tan}\, \theta_1 \tan \theta_2 =$ நிலையெண் என்றிருக்க இரு தொடு வரைகள் இயங்குமாயின், தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையினைக் காண்க. இங்கு θ_1, θ_2 தொடுவரைகள் ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்கள்.

28. இரு தொடுவரைகள் ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணங் களின் கூட்டுத்தொகை மாறுததாயின், அத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை உயிர்ப்புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு கோடென நிறுவுக

29. P-லிருந்து $y^2 = 4ax$-க்கு வரையும் தொடுவரைகள், முனையிடத்து தொடுவரை இவற்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு c^2 எனின், P-ன் இயங்குவரை $x^2 (y^2 - 4ax) = 4c^4$ என நிறுவுக.

30. தம்முள் 45° இடைப்பட்ட கோணமுடைய $y^2 = 4ax$ பரவளையத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையினைக் காண்க.

31. ஆயத்தோடு நிரப்புங் கோணங்கள் பிறப்பிக்கும் இரு தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

32. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகளின் தகவு $K : 1$ என்றிருப்பின், அப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை

$y^2 = (K^{\frac{1}{4}} + K^{-\frac{1}{4}})^2 ax$ என நிறுவுக.

33. $lx + my + n = 0$ கோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் செங்கோடாதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன ?

34. பரவளையத்தின் P இடத்துச் செங்கோடு ஆயத்தினை G-யிலும், முனையிடத்துத் தொடுவரையை G′-யிலும் வெட்டுகிறது. $AGQG'$ நீள் சதுரத்தை வரையின் Q-ன் இயங்குவரை என்ன ? இங்கு A பரவளையத்தின் முனையாகும்.

35. 't_1', 't_2' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் P-லும், செங்கோடுகள் Q-லும் வெட்டுகின்றன. $x \cdot y = a$ கோட்டில் P இருந்தால், Q-ன் இயங்குவரை ஒரு பரவளையம் என நிறுவுக.

36. $y^2 = 4ax$-ன் நாண்கள் உயிர்க்கோட்டடி வழிச் சென்றால், அவற்றின் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் $y^2 = a(x - a)$ வளை வரையில் வெட்டுமென நிறுவுக.

37. ஆயத்திற்கு ஒருபோகான கோட்டுப்புள்ளிகளிலிருந்து பரவளையத்துக்கு வரையும் தொடுவரைத் தொடுபுத்துகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒருநிலைக் கோடென நிறுவுக.

38. ஆயத்தோடு θ கோணம் சாய்ந்திருக்கும் நாணின் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் $\tan^{-1}(2\cot\theta)$ சாய்வுடைய செங்கோட்டில் வெட்டுமென நிறுவுக.

39 உயிர்ப்புள்ளி வழி நாணின் நுனிகளான P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தை மீண்டும் P_1, Q_1 புள்ளிகளில் வெட்டின் P_1Q_1, PQ ஒரு போகாகும் எனவும், $P_1Q_1 = 3PQ$ எனவும் நிறுவுக.

40. $y^2=4ax$ பரவளையத்தின் P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு பரவளையத்தை மீண்டும் Q-லும், PQ-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் பரவளையத்தை R-லும் வெட்டின் QR-ன் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $y^2(y^2-4ax)+64a^4=0$ என நிறுவுக.

41. $y^2=4ax$, $x^2=4ay$ பரவளையங்கள் வெட்டும் புள்ளி $(4a, 4a)$ எனவும், வெட்டுங்கோணம் $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ எனவும் நிறுவுக.

42. 't_1', 't_2' 't_3' புள்ளிகளிடத்துப் பரவளையத்தின் செங்கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{a^2}{2}(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)(t_1+t_2+t_3)^2$ என நிறுவுக.

43. $y^2=4ax$ பரவளையத்தின் 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடு உயிர்ப்புள்ளிவழிச் சென்றால் $t_1t_2+1=0$ என நிறுவுக.

43 *a*. ஒரு பரவளையத்தின் உயிர்ப்புள்ளிவழி நாண் இரண்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயம் பரவளையத்தின் முனைவழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

44. $x^2+y^2=c^2$, $y^2=4ax$ இவற்றின் பொதுத்தொடுவரை பரவளையத்தின் ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் θ கோணத்தை $\sin\theta=a\cos^2\theta$ சமன்பாட்டால் காணலாம் என நிறுவுக.

45. $y^2=4ax$ பரவளையத் தொடுவரைகளுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக்கோட்டடிகளின் இயங்குவரை $x(x^2+y^2)+ay^2=0$ என நிறுவுக.

46. $y^2=4ax$ பரவளையத்தில் P இடத்துத் தொடுவரை ஆயத்தை T-லும் T-லிருந்து TP-க்கு நேர்குத்தாக வரையும் கோடு P-ஐ முனையோடு இணைக்குங் கோட்டினை K-லும் வெட்டின், K-ன் இயங்குவரை $y^2(y^2+2x^2)+8ax^3=0$ என நிறுவுக.

47. $y^2=4ax$ பரவளையத்தின் A முனைவழி வரைந்த AP, AQ நாண்களை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் R-ல் வெட்டுகின்றன. P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள், AR இவை ஆயத்தோடு நிரலே θ_1, θ_2, ϕ கோணங்களைப் பிறப்பிப்பின் $\cot\theta_1+\cot\theta_2+2\tan\phi=0$ என நிறுவுக.

48. பரவளையத்தின் உயிர்ப்புள்ளிவழி நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் உயிர்க்கோட்டினைத் தொடும் என நிறுவுக.

21 பரவளையத்தின் மூன்று செங்கோடுகள் குறித்த புள்ளி வழிச்செல்லும். குறித்த புள்ளியை (h, k) எனக்கொள்க. $(at^2, 2at)$ இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y+tx=2at+at^3$. இச் செங்கோடு (h, k) புள்ளிவழிச் சென்றால்

$$k + th = 2at + at^3$$

(அ-து) $at^3 + (2a - h)t - k = 0$ ...... (1)

இது முப்படிச் சமன்பாடு ஆகையால், இதற்கு மூன்று தீர்வுகள் உண்டு. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் எதிர்நிலையாக (h, k) வழி ஒரு செங்கோடு செல்லும். ஆகவே, (h, k) வழி மூன்று செங்கோடுகள் செல்லும்.

(1)-ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3 எனக் கொண்டால் 't_1', 't_2', 't_3'. இடத்துச் செங்கோடுகள் (h, h) வழிச் செல்லும்.

(1) சமன்பாட்டால் $t_2 + t_2 + t_3 = 0$ ...... (2)

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2a - h}{a} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{k}{a} \quad \ldots\ldots (4)$$

என்று வரும்.

(2), (3), (4) தொடர்புகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும் மூன்று செங்கோடுகளின் பண்புகளை ஆராய உதவும்.

மாதிரி 10

ஒரு பரவளையத்தின் மூன்று செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால், அச் செங்கோட்டடிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் பரவளையத்து ஆயத்தில் இருக்கும்.

't_1'. 't_2', 't_3' இடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) புள்ளிவழிச் சென்றால்

$t_1 + t_2 + t_3 = 0$ என்று முன்பகுதியில் நிறுவினோம்.

$\therefore \quad 2a(t_1 + t_2 + t_3) = 0.$

't_1', 't_2', 't_3' புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையத்தின்

$$y \text{ ஆயத்தொலை} = \frac{2at_1 + 2at_2 + 2at_3}{3} = 0.$$

∴ நடுகோட்டுமையம் x ஆயத்தில், அஃதாவது பரவளையத்தின் ஆயத்தில் இருக்கும்.

22 இரு புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் வெட்டுவதற்குரிய கட்டுப்பாடு.

't_1', 't_2' புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் 't_3' இடத்து வெட்டுமெனக் கொள்வோம்.

∴ 't_1', 't_2', 't_3' புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் செல்லும் புள்ளி $(at_3^2, 2at_3)$.

$$\therefore \quad t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2a - at_3^2}{a}$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{2at_3}{a}$$

(அ-து) $t_1t_2 = 2, \quad t_1 + t_2 = -t_3$.

∴ வேண்டிய கட்டுப்பாடு $t_1t_2 = 2$.

மாதிரி 11

இரு புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் வெட்டின் அப்புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒருநிலைக் கோடாகும் என நிறுவுக.

அப் புள்ளிகள் 't_1', 't_2' எனக் கொள்க.

இப் புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் வெட்டுவதால் $t_1t_2 = 2$.

இப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி $\{at_1t_2, a(t_1 + t_2)\}$ அ-து $\{2a, a(t_1 + t_2)\}$

இப் புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொண்டால் $x_1 = 2a$.

∴ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $x = 2a$.

இது ஒருநிலைக் கோடாகும்.

மாதிரி 12

ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளையத்துக்கு வரையும் செங்கோடுகளில் இரண்டு தம்முள் நேர்குத்தாயின், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன?

(மாதிரி 7-ஐப் பார்க்கவும்.)

அப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) என்றும். (x_1, y_1)-லிருந்து பரவளையத்திற்கு வரையும் செங்கோட்டு அடிகள் 't_1', 't_2', 't_3' என்றும் கொள்க. 't_1', 't_2' இடத்துச் செங்கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாகுமெனக் கொள்க. அச் செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3$$
$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3$$

இக் கோடுகள் நேர்குத்தாக இருப்பதால்

$$t_1 t_2 = -1. \quad \dots (1)$$

$$at^3 + (2a - x_1)t - y_1 = 0. \quad \dots (2)$$

சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3

$$\therefore \ t_1 . t_2 . t_3 = \frac{y_1}{a}.$$

$$\because \ t_1 \ t_2 = -1 \qquad \therefore \ t_3 = -\frac{y_1}{a}$$

t_3, (2)-ன் தீர்வு ஆகையால்

$$at_3^3 + (2a - x_1)t_3 - y_1 = 0$$

t_3-ன் மதிப்பினை இச் சமன்பாட்டுல் ஈடாக்கின்

$$a\left(-\frac{y_1}{a}\right)^3 + \left(-\frac{y_1}{a}\right)(2a - x_1) - y_1 = 0$$

(அ-து) $-\dfrac{y_1^3}{a^2} - \dfrac{y_1(2a - x_1)}{a} - y_1 = 0$

(அ-து) $y_1^2 + (2a - x_1)a + a^2 = 0$

(அ-து) $y_1^2 = ax_1 - 3a^2$

$= a(x_1 - 3a).$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $y^2 = a(x - 3a)$.

23. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தை ஒரு வட்டம் நாற்புள்ளிகளில் வெட்டுமெனவும், அப் புள்ளிகளின் குத்தாயங்களின் கூட்டுத் தொகை சுன்னம் எனவும் நிறுவுக.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்வோம்.

பரவளையத்திலுள்ள புள்ளியொன்றின் ஆயத்தொலைகள் $(at^2, 2at)$. ஆகையால், வட்டமும் பரவளையமும் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளை

$(at^2)^2 + (2at)^2 + 2g\,(at^2) + 2f\,(2at) + c = 0$ - ஆல் காணலாம்.

(அ-து) $a^2t^4 + 2a(g + 2a)t^2 + 4fat + c = 0.$

இது நாற்படிச் சமன்பாடு (Biquadratic Equation) ஆகை யால், வட்டம் பரவளையத்தை நாற்புள்ளிகளில் வெட்டும். t^3-ன் கெழு சுன்னமாகையால், இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனின்

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0.$$

$$\therefore\ 2at_1 + 2at_2 + 2at_3 + 2at_4 = 0.$$

எனவே, வட்டம், பரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் குத்தாயங்களின் கூட்டுத்தொகை சுன்னமாகும்.

மாதிரி 13

பரவளையத்தை ஒரு வட்டம் P, Q, R, S புள்ளிகளில் வெட்டின் பரவளையத்து ஆயத்தோடு PQ, RS சமச் சாய்வுடையன என நிறுவுக.

P, Q, R, S புள்ளிகள் 't_1', 't_2', 't_3', 't_4' எனின்

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0.$$

PQ-ன் சமன்பாடு $y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2$

RS-ன் சமன்பாடு $y(t_3 + t_4) = 2x + 2\,at_3t_4$

PQ, RS கோடுகளின் சாய்வு வீதங்கள் நிரலே

$$\frac{2}{t_1 + t_2},\ \frac{2}{t_3 + t_4} \text{ ஆகும்.}$$

$$t_1 + t_2 = -(t_3 + t_4)$$

இச் சாய்வு வீதங்கள் எண்ணளவில் ஒரே மதிப்பினவாக இருப்பதால், PQ, RS கோடுகள் ஆயத்தோடு சமகோணத்தைப் பிறப்பிக்கும்.

மாதிரி 14

ஒரே புள்ளிவழிச் செங்கோடுகளின் அடிகள் வாயிலாகச் செல்லும் வட்டம், பரவளையத்தை முனையில் வெட்டுமென நிறுவுக. 't_1', 't_2', 't_3' புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால்,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0.$$

இப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம் பரவளையத்தை 't_4'-ல் வெட்டின்,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0.$$

$$\therefore\ t_4 = 0.$$

$\therefore$ 't_4'-ன் ஆயத்தொலைகள் (0, 0)

$\therefore$ 't_4', பரவளையத்தின் முனையாகும்.

பயிற்சிகள் 14

1. (2, 3)-லிருந்து $y^2 = 4x$-க்கு வரையும் தொடுவரைத் தொடுகுத்துகளைக் காண்க. இப் புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

2. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்திலே R-ல் வெட்டின், P, Q புள்ளிகளின் குத்தாயப் பெருக்கத் தொகை $8a^2$ என நிறுவுக.

3. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் வெட்டின், PQ ஆயத்தை ஒரு நிலைப் புள்ளிக்கண் வெட்டுமென நிறுவுக.

4. $y^2 = 4ax$ பரவளைய நாண் ஒன்று ஆயத்தை $(2a, 0)$-ல் வெட்டின், அந் நாணின் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

5. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் $P(at_1^2, 2at_1)$ புள்ளியிலிருந்து PQ, PR நாண்களை Q, R புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகளாக வரையின் QR-ன் சமன்பாடு $yt_1 + 2(x + 2a) = 0$ என நிறுவுக.

P பரவளையத்தில் இயங்குமாயின் QR-ன் துணைப்புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு கோடெனை நிறுவுக.

6. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் P,Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் $R(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்திலும், P, Q இடத்துத் தொடுவரைகள் T-லும் வெட்டின் $TP \cdot TQ = \frac{1}{2}(x_1 - 8a)\sqrt{y_1^2 + 4a^2}$ என நிறுவுக.
R பரவளையத்தில் இயங்குமாயின் PQ-ன் நடுப் புள்ளி $y^2 = 2a(x + 2a)$ பரவளையத்தது என நிறுவுக.

7. $y^2 = 4ax$ பரவளைய நாண்களின் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் வெட்டின் நாண்களின் நடுப் புள்ளியின் இயங்குவரையினைக் காண்க.

8. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் $(am^2, 2am)$ புள்ளியிலிருந்து பரவளையத்துக்கு வரையும் செங்கோடுகளின் அடிகள் $(at_1^2, 2at_1)$ $(at_2^2, 2at_2)$, $t^2 + mt + 2 = 0$ சமன்பாட்டால் காணலாம் என நிறுவுக. இவ்விரு செங்கோட்டு நீளத்தின் பெருக்கத் தொகை $4a^2(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}$ என நிறுவுக

9. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் B,C புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் A புள்ளியில் வெட்டின் ABC முக்கோணச் செங்கோட்டு மையத்தின் இயங்குவரை $y^2 = a(x + 6a)$ என நிறுவுக.

10. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழிச் சென்றால்,

$$\frac{x_1 - x_2}{y_3} + \frac{x_2 - x_3}{y_1} + \frac{x_3 - x_1}{y_2} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

11. $(6a, 0)$ புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளையத்துக்கு வரையும் செங்கோட்டடிகளைக் காண்க.

12. P, Q, R இடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழிச் சென்றால், அப்புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளால் அமைந்த முக்கோணப் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $2y^2 + ax = 0$ பரவளையத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

13. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் முனைவழிச் செல்லும் வட்டம் பரவளையத்தை P, Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. P, Q, R புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளால் அமைந்த முக்கோணப் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $2y^2 + ax = 0$ பரவளையத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

14. ஒரு பரவளையத்தில் P_1, P_2, P_3 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால் $P_1P_2P_3$ முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் ஆயத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

P_1, P_2 புள்ளிகள் (x_1, y_1) ஒடு ஒன்றுபடின் P_1P_3-ன் சமன்பாடு $\dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_1} = 2$ என நிறுவுக.

15. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்துக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்கோடுகளில் இரண்டு ஆயத்தோடு நிரப்புங் கோணத்தைப் பிறப்பித்தால், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு பரவளையம் என நிறுவுக.

16. $y^2 = 4ax$ பரவளைய உயிர்ப்புள்ளிவழி நாண்களின் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் இயங்குவரை $y^2 = a(x - 3a)$ என நிறுவுக.

17. P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$-க்கு வரையும் செங்கோடுகள் ஆயத்தை A, B, C புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. பரவளைய முனையிலிருந்து A, B, C புள்ளிகளின்

தொலைகள் கூட்டுக்கோவையாய் (Arithmetical Progression) இருப்பின் P-ன் இயங்குவரை $27ay^2 = 2(x-2a)^3$ என நிறுவுக.

18. ஒரு பரவளையத்தின் உயிர்க்கோட்டுக்கு ஒருபோகுக் கோட்டிலிருக்கும் P புள்ளியிலிருந்து பரவளையத்துக்கு மூன்று செங்கோடுகள் வரைய இயலும் என நிறுவுக. அச் செங்கோட்டு அடிகளால் அமைந்த முக்கோண நடுக்கோட்டு மையம் ஆயத்தில் ஒரு நிலைத்த புள்ளியென நிறுவுக.

19. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் A, B, C புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k)-ல் வெட்டின், ABC முக்கோணச் செங்கோட்டு மையம் $\left(h-6a, -\frac{k}{2}\right)$ என நிறுவுக.

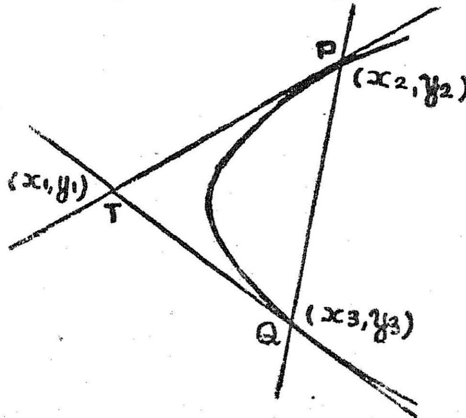
20. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$-க்கு வரையும் செங்கோடு களில் இரண்டு ஒன்றுபடின், அப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை $27ay^2 = 4(x-2a)^3$ என்று நிறுவுக.

21. $y^2 = 4ax$ பரவளைய நாண் ஒன்று $(\lambda a, 0)$ வழிச் சென்றால் அந் நாண் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகள்

$y^2 = \lambda^2 a(x - \lambda a - 2a)$-ல் வெட்டுமென நிறுவுக.

22. P, Q, R புள்ளிகளிடத்து $y^2 = 4ax$-ன் செங்கோடுகள் O வழிச் சென்றால் $SP \cdot SQ \cdot SR = a\ SO^2$ என நிறுவுக. இங்கு S பரவளையத்தின் உயிர்ப் புள்ளியாகும்.

24. (x_1, y_1)-லிருந்து $y^2 = 4ax$-க்கு வரையும் தொடுவரை களின் தொடு நாணுக்குச் சமன்பாடு காணுதல்.



படம்-80

T, P, Q-ஐ நிரலே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனக் கொள்க.

P இடத்துத் தொடுவரை $yy_2 = 2a(x + x_2)$ ... (1)

Q இடத்துத் தொடுவரை $yy_3 = 2a(x + x_3)$ ... (2)

இவ்விரு தொடுவரைகளும் (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால்

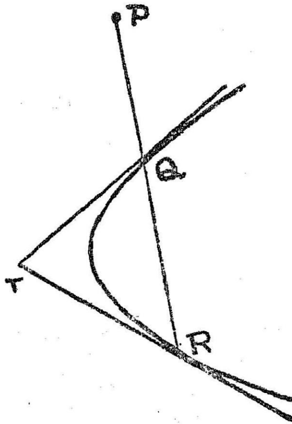
$y_1y_2 = 2a(x_1 + x_2)$ ... (3)

$y_1y_3 = 2a(x_1 + x_3)$ ... (4)

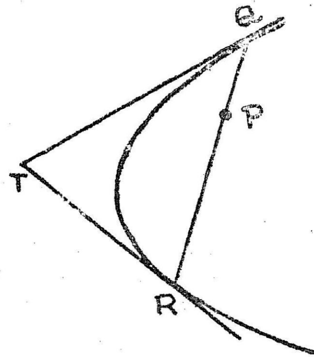
(3), (4) ஆல் P (x_2, y_2), Q (x_3, y_3) புள்ளிகள் $yy_1 = 2a(x + x_1)$-ல் உள எனக் காணலாம்.

$\therefore$ PQ-ன் சமன்பாடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$.

25 $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தைச் சார்ந்த (x_1, y_1)-ன் துணைக் கோடு.



படம்-81



படம்-82

P வழிச் செல்லும் கோடு பரவளையத்தை Q, R-ல் வெட்டும் எனவும், Q, R இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி T (h, k) எனவும் கொள்வோம். T-ன் இயங்குவரை P-ன் துணைக் கோடாகும். T-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் தொடுநாண் QR ஆகையால் QR-ன் சமன்பாடு

$$yk = 2a\,(x + h)$$

இக்கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால் $y_1k = 2a\,(x_1 + h)$

இக் கட்டுப்பாடு உண்மைப்பட (h, k) எப்போதும் $yy_1 = 2a\,(x + x_1)$ கோட்டில் இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே, (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $yy_1 = 2a\,(x + x_1)$ ஆகும்.

இங்கு (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை, (x_1, y_1)-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் தொடுநாண், (x_1, y_1)-ன் துணைக் கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகள் ஒன்றுபோல் இருப்பதைக் காணலாம். (x_1, y_1) பரவளையத்தின் வெளியே இருந்தால், அதன் துணைக்கோடு தொடுநாண் என்பதும், (x_1, y_1), பரவளையத்தில் இருந்தால், அதன் துணைக்கோடு $(x_1\ y_1)$ இடத்துத் தொடுவரை என்பதும் கருதற்பாலன.

துணைத்தேற்றம். உயிர்ப்புள்ளி S-ன் துணைக்கோடு உயிர்க் கோடாகும்.

S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a, 0)$

$(a, 0)$-ன் துணைக்கோடு $y \times 0 = 2a\,(x + a)$

(அ-து) $x + a = 0$.

இச் சமன்பாடு உயிர்க் கோட்டது.

26. P-ன் துணைக்கோடு Q-வழிச் சென்றால், Q-ன் துணைக் கோடு P-வழிச் செல்லும்.

பரவளையம் $y^2 = 4ax$ என்றும், P, Q புள்ளிகள் (x_1, y_1) (x_2, y_2) என்றும் கொள்வோம்.

P-ன் துணைக்கோடு $yy_1 = 2a\,(x + x_1)$

இக் கோடு (x_2, y_2) வழிச் செல்வதால்,

$$y_2\,y_1 = 2a\,(x_2 + x_1)$$

ஆகவே, (x_1, y_1) புள்ளி $yy_2 = 2a\,(x_2 + x)$-ல் இருக்கும்.

அஃதாவது P, Q-ன் துணைக்கோட்டில் இருக்கும்.

27. பரவளையத்தைச் சார்ந்த ஒரு கோட்டின் துணைப்புள்ளி. $y^2 = 4ax$-ஐச் சார்ந்த $Ax + By + C = 0$-ன் துணைப்புள்ளியைக் காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$Ax + By + C = 0$-ன் துணைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1)-ன் துணைக் கோடு $yy_1 = 2a\,(x + x_1)$.

$\therefore\ Ax + By + C = 0,\quad 2ax - y_1 y + 2ax_1 = 0$, இச் சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிக்கும்.

$$\therefore\ \frac{2a}{A} = -\frac{y_1}{B} = \frac{2ax_1}{C}.$$

$$\text{ஆகவே, } x_1 = \frac{C}{A},\ y_1 = \frac{-2aB}{A}.$$

$$\therefore\ Ax + By + C = 0\text{-ன் துணைப்புள்ளி } \left(\frac{C}{A}, -\frac{2aB}{A}\right).$$

28. (x_1, y_1) (x_2, y_2) புள்ளிகள் $y^2 = 4ax$-ஐச் சார்ந்து துணை இய புள்ளிகளாதற்குரிய கட்டுப்பாடு.

(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு (x_2, y_2) வழிச் சென்றால் (x_1, y_1) (x_2, y_2) துணை இயப் புள்ளிகள் எனக் கண்டோம்.

(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$.

இக் கோடு (x_2, y_2) வழிச் செல்வதால் $y_1 y_2 = 2a(x_1 + x_2)$.

29. $lx + my + n = 0$, $l_1 x + m_1 y + n_1 = 0$ கோடுகள் $y^2 = 4ax$-ஐச் சார்ந்த துணை இய கோடுகளாதற்குரிய கட்டுப்பாடு.

$y^2 = 4ax$-ஐச் சார்ந்த $lx + my + n = 0$-ன் துணைப் புள்ளி $\left(\frac{n}{l}, \frac{-2am}{l}\right)$. இப் புள்ளி $l_1 x + m_1 y + n_1 = 0$-ல் இருந்தால், $\frac{l_1 n}{l} - \frac{2amm_1}{l} + n_1 = 0$.

(அ-து) $l_1 n + ln_1 = 2amm_1$

மாதிரி 15

$y^2 = 4ax$ பரவளையத்துத் தொடுவரைகளின் $x^2 = 4by$-ஐச் சார்ந்த துணைப் புள்ளிகள் இயங்குவரையினைக் காண்க.

அத்தகைய துணைப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

ஆகவே, $x^2 = 4by$-ஐச் சார்ந்த (x_1, y_1)-ன் துணைக் கோடு $y^2 = 4ax$-ஐத் தொடுதல் வேண்டும்.

$x^2 = 4by$-ஐச் சார்ந்த (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோட்டுச் சமன்பாடு $xx_1 = 2b(y + y_1)$.

$$(\text{அ-து}) \quad y = \frac{x_1}{2b} x - y_1.$$

இக் கோடு $y^2 = 4ax$-ஐத் தொட்டால்

$$-y_1 = \frac{a}{\frac{x_1}{2b}}$$

(அ-து) $x_1 y_1 + 2ab = 0$.

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $xy + 2ab = 0$

மாதிரி 16

$y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் செங்கோட்டு நாண்கள் தம் துணைப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை $y^2(x + 2a) + 4a^3 = 0$ என நிறுவுக.

PQ ஒரு செங்கோட்டு நாண், அதன் துணைப் புள்ளி (x_1, y_1), P, 't' எனக் கொள்க.

$\therefore$ PQ-ன் சமன்பாடு $y + tx = 2at + at^3$ ... (1)

PQ-ன் துணைப் புள்ளி (x_1, y_1) ஆகையால் PQ-ன் சமன்பாடு $y_1 y = 2a(x + x_1)$.

(அ-து) $y_1 y - 2ax = 2ax_1$ ... (2)

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{1}{y_1} = -\frac{t}{2a} = \frac{2at + at^3}{2ax_1}$$

(அ-து) $t = -\dfrac{2a}{y_1}$ ... (3)

$\dfrac{2ax_1}{y_1} = 2at + at^3$ ... (4)

(3), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து t-ஐ அகற்றுக.

$$\frac{2ax_1}{y_1} = 2a\left(\frac{-2a}{y_1}\right) + a\left(\frac{-2a}{y_1}\right)^3$$

(அ-து) $\dfrac{2ax_1}{y_1} = \dfrac{-4a^2}{y_1} - \dfrac{8a^4}{y_1^3}$

(அ-து) $x_1 y_1^2 + 2ay_1^2 + 4a^3 = 0$.

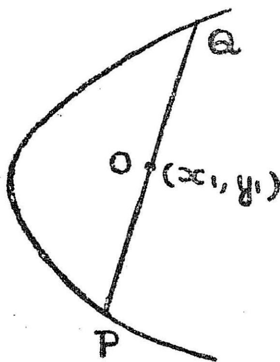
(அ-து) $y_1^2(x_1 + 2a) + 4a^3 = 0$.

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $y^2(x + 2a) + 4a^3 = 0$.

30. குறித்த புள்ளியை நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு.

$y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் நாண் ஒன்றின் நடுப் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$



படம்-83

இங்கு இந் நாண் x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் θ ; (x, y) (x_1, y_1) புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட தொலை r. இக் கோட்டில் $OP = r$ எனின், P-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$$

இப் புள்ளி பரவளையத்தில் இருப்பின்

$$(y_1 + r\sin\theta)^2 = 4a(x_1 + r\cos\theta)$$

(அ-து) $r^2\sin^2\theta + 2r(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta) + y_1^2 - 4ax_1 = 0$.

(x_1, y_1) PQ-ன் நடுப்புள்ளியாதலால், இச் சமன்பாட்டால் வரும் r-ன் மதிப்புகள் ஒரே அளவும் மாறுபட்ட குறியும் உடையனவாக இருக்கும்.

$$\therefore\quad y_1\sin\theta - 2a\cos\theta = 0.$$

(அது) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{y_1}{2a}$.

நாணின் சமன்பாடு $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta}$

(அ-து) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{x - x_1}{y - y_1}$

(அ-து) $\dfrac{y_1}{2a} = \dfrac{x - x_1}{y - y_1}$

(அ-து) $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$

(அ-து) $yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$

(அ-து) $\underline{T = S_1}$.

மாதிரி 17

ஒரு நிலைப்புள்ளி வழிச் செல்லும் பரவளைய நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை பிறிதொரு பரவளையமென நிறுவுக.

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ எனவும், நிலைப்புள்ளி (h, k) எனவும், நிலைப்புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு நாணின் நடுப் புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்க. (x_1, y_1)-ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு $T = S_1$

(அ-து) $yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$

இந் நாண் (h, k) வழிச் சென்றால்

$$ky_1 - 2a(h + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

(அ-து) $ky_1 - 2ah = y_1^2 - 2ax_1$

∴ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$y^2 - 2ax = ky - 2ah.$$

(அ-து) $y^2 - ky = 2ax - 2ah$

(அ-து) $\left(y - \frac{k}{2}\right)^2 = 2ax - 2ah + \frac{k^2}{4}$

$$= 2a\left(x - h + \frac{k^2}{8a}\right)$$

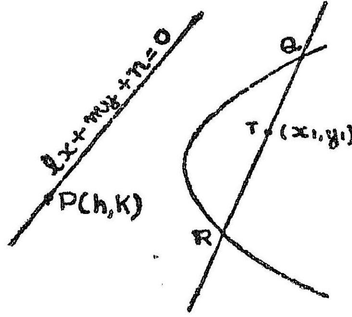
இவ் வளைவரை $\left(h - \frac{k^2}{8a}, \frac{k}{2}\right)$ புள்ளியை முனையாகவும், $2a$-ஐ நேரகலமாகவும் கொண்ட பரவளையமாகும்.

மாதிரி 18

$y^2 = 4ax$ பரவளையத்தைச் சார்ந்த P-ன் துணைக்கோடு வளைவரையை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $lx + my + n = 0$ கோட்டில் P இருந்தால் QR-ன் நடுப் புள்ளி $l(y^2 - 4ax) + 2a(lx + my + n) = 0$ பரவளையத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

முதல் முறை :—

P (h, k) என்றும், QR-ன் நடுப் புள்ளி T (x_1, y_1) என்றும் கொள்க.



படம் - 84

QR-ன் சமன்பாடு

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

(அ-து) $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$ ...... (1)

QR, P-ன் துணைக்கோடு ஆகையால்,

அதன் சமன்பாடு

$$yk = 2a(x + h).$$

(அ-து) $yk - 2ax = 2ah$ ...... (2)

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{y_1}{k} = 1 = \frac{y_1^2 - 2ax_1}{2ah}.$$

$\therefore\ y_1 = k.$ ...... (3)

$y_1^2 - 2ax_1 = 2ah.$ ...... (4)

P புள்ளி $lx + my + n = 0$ ல் இருப்பதால்

$$lh + mk + n = 0.$$ ...... (5)

(3), (4), (5) சமன்பாடுகளிலிருந்து h, k-ஐ அகற்றுக.

$$l.\frac{y_1^2 - 2ax_1}{2a} + my_1 + n = 0.$$

(அ-து) $l(y_1^2 - 2ax_1) + 2a(my_1 + n) = 0.$

(அ-து) $l(y_1^2 - 4ax_1) + 2a(lx_1 + my_1 + n) = 0.$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$l(y^2 - 4ax) + 2a(lx + my + n) = 0.$$

இரண்டாவது முறை :—

Q, R, QR-ன் நடுப்புள்ளி நிரலே 't_1', 't_2', (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$$x_1 = \frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$y_1 = a(t_1 + t_2) \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

P-ன் துணைக்கோடு QR.

∴ Q, R இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி P.

∴ P-ன் ஆயத்தொலைகள் $\{at_1t_2, a(t_1 + t_2)\}$.

P, $lx + my + n = 0$ கோட்டில் இருப்பதால்

$$lat_1t_2 + ma(t_1 + t_2) + n = 0. \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து t_1, t_2-ஐ அகற்றுக.

(1)-லிருந்து $t_1^2 + t_2^2 = \frac{2x_1}{a}$ என்று வரும்.

(2)-லிருந்து $t_1 + t_2 = \frac{y_1}{a}$ என்று வரும்.

$$2t_1t_2 = (t_1 + t_2)^2 - (t_1^2 + t_2^2)$$

$$= \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{2x_1}{a}.$$

$$\therefore \quad t_1t_2 = \frac{y_1^2 - 2ax_1}{2a^2}$$

(3)-ல், t_1t_2, $t_1 + t_2$-க்குப் பதில் $\frac{y_1^2 - 2ax_1}{2a^2}$, $\frac{y_1}{a}$

மதிப்புகளை ஈடாக்கின்

$$la\frac{y_1^2 - 2ax_1}{2a^2} + ma.\frac{y_1}{a} + n = 0.$$

(அ-து) $l(y_1^2 - 2ax_1) + 2a(my_1 + n) = 0.$

(அ-து) $l(y_1^2 - 4ax_1) + 2a(lx_1 + my_1 + n) = 0.$

∴ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$l(y^2 - 4ax) + 2a(lx + my + n) = 0.$$

31. பரவளையத்தின் ஒருபோகு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை பரவளைய ஆயத்துக்கு ஒருபோகான கோடாகும்.

$y = mx$ கோட்டுக்கு ஒருபோகான நாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

இந் நாணின் சமன்பாடு $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$

இந் நாண் $y = mx$-க்கு ஒருபோகாகையால்

$$m = \frac{2a}{y_1}$$

(அ-து) $y_1 = \dfrac{2a}{m}$.

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $y = \dfrac{2a}{m}$.

இது பரவளையத்தின் ஆயத்துக்கு ஒருபோகான கோடு ஆகும்.

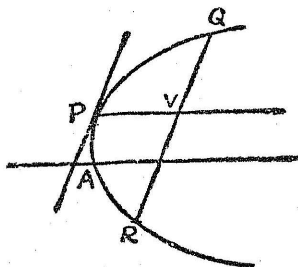
பரவளைய ஆயத்துக்கு ஒருபோகான கோடு பரவளையத்தின் விட்டம் (Diameter) எனப்படும்.

மாதிரி 19

பரவளைய விட்டத்தின் நுனியிடத்துத் தொடுவரை, அவ் விட்டம் சமமாகப் பிரிக்கும் நாண்களுக்கு ஒருபோகாகும் என நிறுவுக.

பரவளையத்தின் விட்டம் PV, அது சமமாகப் பிரிக்கும் நாண் QVR எனக் கொள்க.

QVR, $y = mx$-க்கு ஒருபோகு ஆயின் PV-ன் சமன்பாடு $y = \dfrac{2a}{m}$ என நிறுவினோம்.



படம் 85

$\therefore$ P-ன் y-ஆயத் தொலை $\dfrac{2a}{m}$

$\therefore$ P புள்ளி $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$ ஆகும்.

$\therefore$ P புள்ளியிடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y = mx + \frac{a}{m}.$$

$\therefore$ P இடத்துத் தொடுவரை QVR-க்கு ஒருபோகாகும்.

மாதிரி 20

பரவளையத்தின் நாண் QR-ஐ PV விட்டம் V புள்ளியில் சமமாகப் பிரித்தால் $QV^2 = 4\,SP\,.\,PV$ என நிறுவுக.

Q, R புள்ளிகளை 't_1', 't_2' எனக் கொள்க.

$\therefore$ V-ன் ஆயத்தொலைகள் $\{\frac{1}{2}a(t_1^2+t_2^2),\ a(t_1+t_2)\}$

$$QV^2 = \{\tfrac{1}{2}a(t_1^2+t_2^2)-at_1^2\}^2 + \{a(t_1+t_2)-2at_1\}^2$$
$$= \{\tfrac{1}{2}a(t_2^2-t_1^2)\}^2 + \{a(t_2-t_1)\}^2.$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2(t_2+t_1)^2(t_2-t_1)^2 + a^2(t_2-t_1)^2.$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2(t_2-t_1)^2\{(t_1+t_2)^2+4\}$$

P புள்ளியை $(at^2, 2at)$ எனக் கொள்க

PV ஆயத்துக்கு ஒருபோகாதலால் P-ன் y ஆயத்தொலை $=$ V-ன் y ஆயத்தொலை.

(அ-து) $2at = a(t_1+t_2)$.

$\therefore\ t = \frac{1}{2}(t_1+t_2)$.

$\therefore$ P-ன் ஆயத்தொலைகள் $\{\frac{1}{4}a(t_1+t_2)^2,\ a(t_1+t_2)\}$

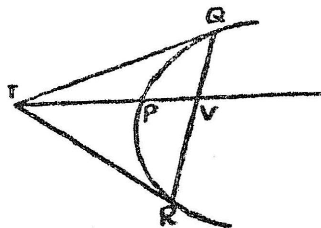
$$PV = \tfrac{1}{2}a(t_1^2+t_2^2) - \tfrac{1}{4}a(t_1+t_2)^2.$$
$$= \tfrac{1}{4}a(t_1-t_2)^2.$$
$$SP^2 = (a-at^2)^2 + 4a^2t^2$$
$$= a^2(1+t^2)^2$$
$$\therefore\ SP = a(1+t^2)$$
$$= a\{1+\tfrac{1}{4}(t_1+t_2)^2\}$$
$$= \frac{a}{4}\{4+(t_1+t_2)^2\}$$

$\therefore\ QV^2 = 4\,SP\,.\,PV.$

மாதிரி 21

பரவளைய நாணின் நுனிகளிடத்துத் தொடுவரைகள். அந் நாணைச் சமமாகப் பிரிக்கும் விட்டத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

Q, R புள்ளிகளை 't_1', 't_2' எனக் கொண்டால் PV-ன் சமன்பாடு $y = a(t_1+t_2)$. Q, R இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி T $\{at_1t_2,\ a(t_1+t_2)\}$.



படம் 86

$\therefore$ இப் புள்ளி PV-ல் இருக்கும்.

TP = PV எனவும் நிறுவலாம்.

P-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{\frac{a}{4}(t_1+t_2)^2,\ a\,(t_1+t_2)\right\}$

V-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{\frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2),\ a\,(t_1+t_2)\right\}$

$$TP = \frac{a}{4}(t_1+t_2)^2 - at_1\,t_2 = \frac{a}{4}(t_1-t_2)^2$$

$$PV = \frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2) - \frac{a}{4}(t_1+t_2)^2 = \frac{a}{4}(t_1-t_2)^2$$

$\therefore$ TP = PV.

பயிற்சிகள் 15

1. $y^2 = 4x$ பரவளையத்தைச் சார்ந்த (1, 7), (4, 8) புள்ளிகளின் துணைக்கோடுகள் தம் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இப் புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடு துணைக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் துணைக்கோடு என நிறுவுக.

2. $2x-3y+4=0$ கோட்டுப் புள்ளிகளிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளையத்துக்கு வரையும் தொடுவரைத் தொடுநாண்கள் ஒரு நிலைப் புள்ளிவழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

3. $y^2 = 6x$ பரவளையத்தில் (9, 5) புள்ளிவழிச் செல்லும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை $y^2-5y-3x+27=0$ என நிறுவுக.

4. $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த P புள்ளியின் துணைக்கோடு $y^2=4ax$-ஐத் தொட்டால், P புள்ளி $y^2+ax=0$-ல் இருக்குமென நிறுவுக.

5. $x^2 + y^2 = 4a^2$ வட்டத்துத் தொடுவரைகளின் $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தைச் சார்ந்த துணைப் புள்ளிகளின் இயங்குவரையைக் காண்க.

6. $y^2 = 4ax$ பரவளைய முனையிடத்துச் செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் நாண்களின் துணைப் புள்ளிகள் இயங்குவரை $x + 4a = 0$ என நிறுவுக.

7 பரவளையத்தின் P, Q இடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளையத்தில் R-ல் வெட்டினால், R-ன் குறித்த நிலைக்கு PQ-ன் துணைப் புள்ளியைக் காண்க.

R பரவளையத்தில் இயங்குமாயின், PQ-ன் துணைப் புள்ளி இயங்குவரையினைக் காண்க.

8. ஒரு பரவளையத் தொடுவரைகளில் இரண்டு ஆயத்தோடு நிரப்புங் கோணத்தினைப் பிறப்பித்தால், அத் தொடுவரைகளின் தொடு நாண், உயிர்க்கோட்டடிவழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

9. $y^2 = 4ax$ பரவளைய நாண்கள் முனையிடத்து α நிலைக் கோணத்தைப் பிறப்பிப்பித்தால், அந் நாண்களின் துணைப் புள்ளிகள் இயங்குவரை

$$(x + 4a)^2 \tan^2 \alpha = 4\,(y^2 - 4ax) \text{ என நிறுவுக.}$$

10. $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் $2l$ நீளமுடைய நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் இயங்குவரை

$$(y^2 + 4a^2)\,(4ax - y^2) = 4a^2 l^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

11. $y^2 = 4ax$ பரவளையச் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் இயங்குவரையினைக் காண்க.

12 பரவளைய முனையிடத்துத் தொடுவரைப் புள்ளிகளிலிருந்து அவற்றின் துணைக் கோடுகளுக்கு வரையும் நேர் குத்துக் கோட்டு அடிகளின் இயங்குவரை ஒரு வட்டமென நிறுவுக.

13. $y = b$ கோட்டின் P புள்ளியிலிருந்து P-ன் $y^2 = 4ax$-ஐச் சார்ந்த துணைக் கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டு அடியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

14. $y = c$ கோட்டுப் புள்ளிகளின் $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ பரவளையங்களைச் சார்ந்த துணைக் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி இயங்குவரை

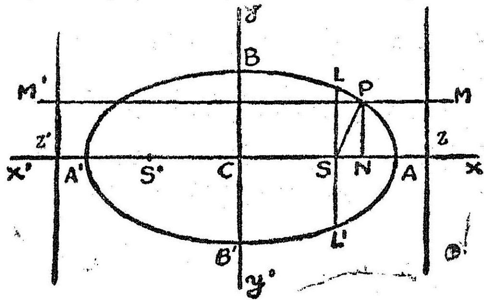
$$2ax^2 - cxy + 4a^2\,(y + c) = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

7. நீள்வட்டம்

(Ellipse)

1. ஒரு கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலைத்தகவு $e < 1$ எனின், அதனை நீள்வட்டமென முந்தின அதிகாரத்தில் வரையறுத்தோம்.

2. நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு : உயிர்ப்புள்ளி S எனவும், உயிர்க்கோடு ZM எனவும் கொள்க. உயிர்க்கோட்டுக்கு ZS-ஐ நேர்குத்தாக வரைக. SZ ஐ $e : 1$ தகவுக்கேற்ப அகத்தும் புறத்தும் பிரிக்கும் A, A′ புள்ளிகளைக் காண்க.



படம் 87

$$\therefore \frac{SA}{AZ} = e, \quad \frac{A'S}{A'Z} = e$$

$\therefore$ A, A′ புள்ளிகள் நீள்வட்டத்தன.

AA′-ன் நடுப்புள்ளி C எனவும், $AA' = 2a$ எனவும் கொள்க.

$SA = e \,.\, AZ$

$A'S = e \,.\, A'Z$

$\therefore \quad SA + A'S = e\,(AZ + A'Z)$

(அ-து) $AA' = e\,(CZ - CA + A'C + CZ)$

(அ-து) $2a = e\,(2CZ)$

$$\therefore \quad CZ = \frac{a}{e}$$

$A'S - SA = e\,(A'Z - AZ)$

(அ-து) $(A'C + CS) - (CA - CS) = e \,.\, AA'$

(அ-து) $2CS = e\,.2a$

$$\therefore \quad CS = ae.$$

C-ஐ ஆதியாகவும், $A'CA$-ஐ x ஆயமாகவும், C வழி ACA'-க்கு நேர்குத்தான கோட்டினை y ஆயமாகவும், நீள்வட்டத்துப் புள்ளிகளுள் ஒன்றுன P-ஐ (x, y) ஆகவும் கொள்க.

S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$

$$PM = CZ - CN = \frac{a}{e} - x_1$$

P, நீள்வட்டத்தில் இருப்பதால் $\dfrac{SP}{PM} = e$

$$\therefore \quad SP^2 = e^2\, PM^2$$

(அ-து) $(x_1 - ae)^2 + y_1^2 = e^2\left(\dfrac{a}{e} - x_1\right)^2$

(அ-து) $x_1^2 - 2aex_1 + a^2e^2 + y_1^2 = a^2 - 2aex_1 + e^2x_1^2$

(அ-து) $x_1^2\,(1 - e^2) + y_1^2 = a^2\,(1 - e^2)$

(அ-து) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{a^2\,(1 - e^2)} = 1$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை, அஃதாவது நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2\,(1 - e^2)} = 1$

$b^2 = a^2\,(1 - e^2)$ எனக் கொள்ள நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

இது நீள்வட்டத்தின் திட்டமான சமன்பாடாகும்.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டம் வரைதல்.

இச் சமன்பாட்டில் $y = 0$ எனக் கொண்டால் $x = \pm a$

∴ நீள்வட்டம் $(a, 0)$, $(-a, 0)$ புள்ளிகள், அஃதாவது A, A′ வழிச் செல்லும்.

A, A′ புள்ளிகள் நீள்வட்டத்தின் முனைகள் (Vertices) எனப்படும்.

$x = 0$ எனின் $y = \pm b$

∴ நீள்வட்டம் $(0, b)$, $(0, -b)$ புள்ளிகள், அஃதாவது B, B′ வழிச் செல்லும்.

இச் சமன்பாட்டை $y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ ...... (1)

அல்லது $x = \pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ ...... (2)

என்று எழுதலாம்.

$x^2 > a^2$, அஃதாவது $x > a$ அல்லது $x < -a$ என்றிருப்பின், y-க்குக் கற்பனை மதிப்புகள் வருமாதலின் A-க்கு வலப் பக்கத்தும், A′-க்கு இடப்பக்கத்தும் வளைவரை வராது.

(1) சமன்பாட்டில் $-a$, a-க்கு இடைப்பட்ட x-ன் மதிப்பு தோறும் நேர் நிலையாக y-க்குக் குறி வேறுபட்ட ஒரே எண் மதிப்பில் இரு மதிப்புகள் வரும். ஆகவே, வளைவரை x ஆயத்தோடு சமச்சீருடையதாகும்.

இம்மாதிரியே B-க்கு மேலும், B′-க்குக் கீழும் வளைவரை வராது; வளைவரை y ஆயத்தோடும் சமச்சீருடையதாகும்.

நீள்வட்டம் x, y ஆயங்களோடு சமச்சீருடையதாதலின் (x, y) புள்ளி நீள்வட்டத்தில் இருப்பின் $(x, -y)$, $(-x, y)$ $(-x, -y)$ புள்ளிகளும் நீள்வட்டத்தில் இருக்கும். பின்னும் (x, y), $(-x, -y)$ புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடு ஆதிவழிச் செல்வதால், C வழிச் செல்லும் நாண்கள் அனைத்தையும், C சமமாகப் பிரிக்கும். C நீள்வட்டத்தின் மையம் (Centre) எனப்படும்.

x-க்குப் பல மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர் நிலையான y-ன் மதிப்புகளைக் காணில் வளைவரைப் புள்ளி பலவற்றின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும். இவற்றால் அறியும் நீள்வட்டத்து உருவத்தினை முந்தின பகுதிப் படத்தில் காண்க.

AA′, BB′, நிரலே நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு (Major Axis), குற்றச்சு (Minor Axis) எனப்படும். ஆகவே நெட்டச்சு, குற்றச்சு நீளங்கள் நிரலே $2a$, $2b$ ஆகும்.

4. நேரகலம் (Latus Rectum)—உயிர்ப்புள்ளி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் குத்தாயம் நேரகலம் எனப்படும். LL′-ஐ நேரகலம் எனக் கொண்டால்

$$\begin{aligned}SL &= e.\, SZ \\ &= e\,(CZ - CS) \\ &= e\left(\frac{a}{e} - ae\right) \\ &= a\,(1 - e^2) \\ &= \frac{b^2}{a}\end{aligned}$$

$\therefore$ அரை நேரகலம் $= \dfrac{b^2}{a}$.

5. இரண்டாவது உயிர்ப்புள்ளி, உயிர்கோடு:—CA′-ல் $CS' = ae$ என்றிருக்க S′ புள்ளியும், CA′-ன் நீட்சியில் $CZ' = \dfrac{a}{e}$ என்றிருக்க Z′ புள்ளியும் எடுத்து Z′ வழி CZ′-க்கு நேர்க்குத்தாக Z′M′-யும், Z′M′-க்கு நேர்குத்தாக PM′-யும் வரைக.

$\dfrac{S'P}{PM'} = e$ என்றிருக்க P இயங்குமெனக் கொள்வோம்.

P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனின் $M'P = \dfrac{a}{e} + x_1$

S′-ன் ஆயத்தொலைகள் $(-ae, 0)$

$$S'P^2 = e^2\ PM'^2$$

$$\therefore\ (x_1 + ae)^2 + y_1^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x_1\right)^2$$

(அ-து) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$

(அ-து) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

ஆகவே P, $\frac{SP}{PM} = e$ அல்லது $\frac{S'P}{PM'} = e$ என்ற நிலையில் இயங்குமாயின் அதன் இயங்குவரை ஒரே நீள்வட்டமான, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும்.

$\therefore$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்திற்கு S', Z'K' இரண்டாவது உயிர்ப்புள்ளி, உயிர்க்கோடு ஆகும்.

S $(ae, 0)$ உயிர்புள்ளியின் ஒத்த (Corresponding) உயிர்க் கோடு $x - \frac{a}{e} = 0$, S' $(-ae, 0)$ உயிர்ப்புள்ளியின் ஒத்த உயிர்க்கோடு $x + \frac{a}{e} = 0$ ஆகும்.

6. நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காட்டும் வடிவ கணிதப்பண்பு:—

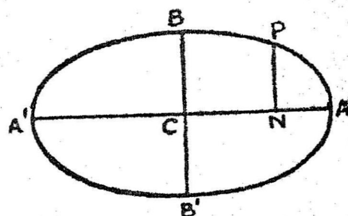
நீள்வட்டத்துப் புள்ளி P-ன் குத்தாயம் PN எனக் கொள்க. P புள்ளி நீள் வட்டத்ததாதலின்.

$$\frac{CN^2}{a^2} + \frac{PN^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{b^2} = 1 - \frac{CN^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 - CN^2}{a^2}$$

$$= \frac{CA^2 - CN^2}{a^2}$$



படம் 88.

$$= \frac{(CA + CN)(CA - CN)}{a^2}$$

$$= \frac{A'N \cdot NA}{a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{A'N \cdot NA} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{BC^2}{CA^2}$$

7. (x_1, y_1) புள்ளி நீள்வட்டத்தின் உள், வளைவரை, வெளியில் இருப்பின் $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$-ன் மதிப்பு நிரலே குறை, சுன்னம், மிகை ஆகும்.

Q புள்ளி (x_1, y_1), Q வழி குத்தாயம் QN, QN நீள் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி P எனக் கொள்க.

$$PN^2 = b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

Q நீள்வட்டத்தின் உள்ளிருப்பதால் $QN < PN$

$$\therefore \quad QN^2 < b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

(அ-து) $\frac{y_1^2}{b^2} < 1 - \frac{x_1^2}{a^2}$.

(அ-து) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0$.

இம் மாதிரியே Q புள்ளி நீள்வட்டத்தின் வெளியே இருப்பின் $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0$.

வளைவரையில் (x_1, y_1) இருப்பின் $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$.

8. தம்முள் நேர்குத்தான l, l' கோடுகளிலிருந்து P புள்ளியின் p_1, p_2 தொலைகள் $\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} = 1$ தொடர்புடையதாக இருப்பின், P-ன் இயங்குவரை ஒரு நீள்வட்டமாகும். இந் நீள்வட்டத்தின் மையம் l, l' கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி எனவும், $a > b$ என்றிருப்பின் நெட்டச்சின் நீளம் $2a$, குற்றச்சின் நீளம் $2b$ எனவும், நெட்டச்சு, குற்றச்சு நிரலே l, l' கோடுகளில் இருக்கும் எனவும் காணலாம்.

மாதிரி 1

ஒரு நீள்வட்டத்தின் உயிர்ப்புள்ளி (3, 1), ஒத்த உயிர்க் கோடு $x - y + 6 = 0$, மையத் தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனின் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

நீள்வட்டத்துப் புள்ளி P (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$SP = \frac{1}{2} \times$ ($x - y + 6 = 0$-லிருந்து P-ன் தொலை)

$$\therefore \quad (x_1 - 3)^2 + (y_1 - 1)^2 = (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \left(\frac{x_1 - y_1 + 6}{\sqrt{1+1}}\right)^2$$

(அ-து) $8(x_1 - 3)^2 + 8(y_1 - 1)^2 = (x_1 - y_1 + 6)^2$

(அ-து) $7x_1^2 + 2x_1y_1 + 7y_1^2 - 60x_1 - 4y_1 + 44 = 0$.

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை, அஃதாவது நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 60x - 4y + 44 = 0$.

மாதிரி 2

ஒரு நீள்வட்டத்தின் மையம் (2, 3), உயிர்ப்புள்ளி (3, 4), மையத் தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

நீள்வட்ட நெட்டச்சின் சமன்பாடு (2, 3), (3, 4) புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடாகும்.

(அ-து) $\dfrac{y-3}{3-4} = \dfrac{x-2}{2-3}$

(அ-து) $x - y + 1 = 0$.

குற்றச்சு, (2, 3) வழி இக் கோட்டுக்கு நேர்குத்தான கோடாகும்.

$\therefore$ குற்றச்சின் சமன்பாடு $x + y = 5$.

மையம் C, உயிர்ப்புள்ளி S, நெட்டச்சின் நீளம் $2a$ குற்றச்சின் நீளம் $2b$ எனின்

$$CS = ae.$$

(அ-து) $CS^2 = \dfrac{a^2}{4}$

$$\therefore \quad (3-2)^2 + (4-3)^2 = \frac{a^2}{4}$$

(அ-து) $a^2 = 8$

$a^2(1 - e^2) = b^2$

$\therefore \quad b^2 = 8(1 - \frac{1}{4}) = 6.$

$x - y + 1 = 0$, $x + y = 5$ கோடுகளிலிருந்து நீள்வட்டத்துப் புள்ளி ஒன்றின் தொலைகள் p_1, p_2 எனின்,

$$\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{\left(\frac{x_1 - y_1 + 1}{\sqrt{2}}\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{x_1 + y_1 - 5}{\sqrt{2}}\right)^2}{6} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{(x_1 - y_1 + 1)^2}{16} + \frac{(x_1 + y_1 - 5)^2}{12} = 1.$$

$\therefore$ P-ன் இயங்குவரை $\dfrac{(x - y + 1)^2}{16} + \dfrac{(x + y - 5)^2}{12} = 1.$

மாதிரி 3

$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$ நீள்வட்டத்தின் மையமொடு மையத் தொலைத் தகவைக் காண்க.

இச் சமன்பாட்டினை

$9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) = 116$ என்று எழுதலாம்.

(அ-து) $9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 4y + 4) = 225$

(அ-து) $9(x - 1)^2 + 25(y - 2)^2 = 225.$

(அ-து) $\dfrac{(x - 1)^2}{25} + \dfrac{(y - 2)^2}{9} = 1.$

ஆதியை (1, 2) புள்ளிக்கு மாற்றின், நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ என்று வரும்.

ஆகவே, இச் சமன்பாடு (1, 2) புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட நீள்வட்டமாகும்.

இந் நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு, குற்றச்சு நிரலே $2a$, $2b$ எனின், $a^2 = 25$, $b^2 = 9$.

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\therefore \quad 9 = 25(1 - e^2)$$

$$\therefore \quad e = \frac{4}{5}$$

பயிற்சிகள் 16

1. $9x^2 + 4y^2 = 36$ நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைவினையும், உயிர்ப் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளையும் காண்க.

2. ஒரு நீள்வட்டத்தின் உயிர்ப் புள்ளி $(3, -1)$, உயிர்க் கோடு $x - y + 16 = 0$, மையத் தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

3. நீள்வட்டம் ஒன்றின் உயிர்ப் புள்ளி $(1, 2)$, ஒத்த உயிர்க் கோடு $2x - 3y + 6 = 0$, மையத் தொலைத்தகவு $\frac{2}{3}$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

4. ஒரு நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைத்தகவு $\frac{1}{3}$ நேரகலத்தின் நீளம் 8 எனின், நீள் வட்டச் சமன்பாடு என்ன ?

5. ஒரு நீள்வட்டத்தின் உயிர்ப்புள்ளிகளை ஒரு குற்றச்சு நுனியோடு இணைக்க வரும் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் $90°$ எனின், மையத் தொலைத்தகவு என்ன ? நெட்டச்சின் நீளம் $2\sqrt{2}$ எனக் கொண்டு நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

6. கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் நீள்வட்டங்களின் மையம் நேரகலம், மையத் தொலைத்தகவு, உயிர்ப் புள்ளிகளைக் காண்க.

(1) $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0.$

(2) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0.$

(3) $4(x - 1)^2 + 3y^2 = 4.$

(4) $(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$

7. அடிப்பாகத்தில் அரை நீள வட்டவடிவமுடைய தோரணம் ஒன்று, ஒரு தெருவின்மேல் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சு பாதையோடு ஒன்றுபடுகிறது. தெருவின் அகலம் 34 அடி. தெருவோரத்திலிருந்து 2 அடிக்கு அப்பால் நிற்கும் 6 அடி உயர மனிதனின் தலை தோரணத்தைத் தொட்டால் தோரணத்தின் அதிக பட்ச உயரமென்ன ?

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடு

வரையின் சமன்பாடு.

P (x_1, y_1) என்றும் அதற்கு மிக நெருங்கிய புள்ளி Q (x_2, y_2) என்றும் கொள்க.

$$\therefore \text{ PQ-ன் சமன்பாடு } y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \ldots\ldots (1)$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) நீள்வட்டத்தில் இருப்பதால்

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (3)$$

(3) ஐ (2)-லிருந்து கழித்தால்,

$$\frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} = 0.$$

$$(\text{அ-து}) \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = -\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \quad \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

இம் மதிப்பை (1)-ல் ஈடாக்கின் PQ-ன் சமன்பாடு

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \quad \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

Q, P யோடு நெருங்கி இறுதியில் அதனோடு ஒன்றுபடுவதால் $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ எனக்கொள்ள P இடத்துத் தொடுவரை கிடைக்கும்.

$$\text{அதன் சமன்பாடு } y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \quad \frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1)$$

$$(\text{அ-து}) \quad a^2 y_1 (y - y_1) = -b^2 x_1 (x - x_1)$$

$$(\text{அ-து}) \quad b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$= 1 \quad ,\{ (2) \text{ ஆல் } \}.$$

$\therefore$ P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் (x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு.

(x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ எனக் கண்டோம்.

தொடுவரையின் 'm' $= -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

$\therefore$ செங்கோட்டின் 'm' $= \frac{a^2y_1}{b^2x_1}$

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$

(அ-து) $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2.$

11. $y = mx + c$ கோடும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள்.

வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்று P எனக் கொள்வோம். கோடும் நீள்வட்டமும் P வழிச் செல்லுவதால் P-ன் ஆயத்தொலைகள், கோடு, நீள்வட்டத்துச் சமன்பாடுகளில் பொருந்த வேண்டும். ஆகவே, இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் விடுவிக்க வரும் தீர்வுகள் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளாகும்.

$mx + c$-ஐ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ சமன்பாட்டில் y-க்கு ஈடாக்கின்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1.$$

(அ-து) $(b^2 + a^2m^2)\ x^2 + 2mca^2x + a^2(c^2 - b^2) = 0.$ இது x-ல் இருபடிச் சமன்பாடு ஆதலின் இதற்கு இரு தீர்வுகள் உண்டு. அவை $x_1\ x_2$ என்று கொள்க. x_1, x_2-ஐ $y = mx + c$-ல் ஈடு கொடுத்தால் இம் மதிப்புகளுக்கு எதிர்நிலையான மதிப்புகள் $mx_1 + c$, $mx_2 + c$; ஆகவே, வெட்டும் புள்ளிகள் $(x_1, mx_1 + c)$, $(x_2, mx_2 + c)$.

12. $y = mx + c$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தைத் தொடுதற்குறிய கட்டுப்பாடு.

$$(b^2 + a^2 m^2) x^2 + 2mc\, a^2 x + a^2 (c^2 - b^2) = 0 \quad \ldots(1)$$

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், கோடும் நீள்வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள் என்று முற்பகுதியில் கண்டோம். நீள்வட்டத்தினை $y = mx + c$ தொடவே வெட்டும் இரு புள்ளிகளும் ஒன்றுபடும். அந்நிலையில் அவற்றின் ஆயத்தொலைகள் சமமாகும். எனவே, (1) சமன்பாட்டின் தீர்வுகளும் சமமாகும்.

$$\therefore \quad 4m^2 c^2 a^4 = 4a^2 (c^2 - b^2)(b^2 + a^2 m^2)$$

$$(\text{அ-து}) \quad c^2 = a^2m^2 + b^2.$$

ஆகவே, $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ கோடுகள் m-ன் அனைத்து மதிப்புக்கும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தினைத் தொடும்.

13. $y = mx + c$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐத் தொட்டால் தொடுகுத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காணல்.

$y = mx + c$ நீள்வட்டத்தினை $P(x_1, y_1)$-ல் தொடும் எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad mx - y + c = 0, \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

இவை ஒரே கோட்டின் சமன்பாடுகள்.

$$\therefore \quad \frac{ma^2}{x_1} = -\frac{b^2}{y_1} = -c.$$

$$\therefore \quad x_1 = -\frac{ma^2}{c}, \; y_1 = \frac{b^2}{c}$$

(x_1, y_1) நீள்வட்டத்ததாதலின் $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

$$\therefore \quad \frac{m^2a^4}{c^2a^2} + \frac{b^4}{c^2 b^2} = 1$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2m^2 + b^2$$

$\therefore$ P-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(-\dfrac{ma^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$

14. ஒரு புள்ளியிலிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு இரு தொடுவரைகள் உண்டு என நிறுவுதல்.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$-ன் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ எனக் கண்டோம்.

இது (x_1, y_1) வழிச் சென்றால்

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$$

(அ-து) $(y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 + b^2$

(அ-து) $(x_1^2 - a^2)\, m^2 - y_1x_1\, 2m + y_1^2 - b^2 = 0 \quad (1)$

(x_1, y_1) வழி செல்லும் தொடுவரைகளின் 'm' கள் இச் சமன்பாட்டால் கிடைக்கும்.

இது இருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால் m-க்கு இரு மதிப்புகள் வரும். ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் நேர்நிலையாக ஒரு தொடுவரையும், அதனால் (x_1, y_1) வழி இரு தொடுவரைகளும் உளவாகும்.

15. தம்முள் நேர்குத்தான நீள்வட்டத் தொடுவரைகள் ஒரு வட்டத்தில் வெட்டும். இவ்வட்டம் நீள்வட்டத்தின் உயிர்வட்டம் (Director Circle) எனப்படும். நீள்வட்டத்துச் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ எனவும், தம்முள் நேர்குத்தான தொடுவரைகள் (x_1, y_1)-ல் வெட்டும் எனவும் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) லிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் 'm' கள்

$(x_1^2 - a^2)\, m^2 - 2x_1y_1m + y_1^2 - b^2 = 0$ சமன்பாட்டால் கிடைக்கும் என நிறுவினோம்.

இத் தொடுவரைகளின் 'm' கள் m_1, m_2 எனின்

$$m_1m_2 = \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2}$$

இத் தொடுவரைகள் தம்முள் நேர்குத்தாதலின்

$$m_1 m_2 = -1,$$

$$\therefore \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = -1.$$

(அ-து) $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$.

$\therefore (x_1, y_1)$, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ வட்டத்தில் இருக்கும்.

இவ் வட்டத்தின் மையம் ஆதி, ஆரை $\sqrt{a^2 + b^2}$ ஆகும். ஆகவே, தம்முள் நேர்குத்தான இரு தொடு வரைகள் நீள்வட்டத்தின் மையத்தை மையமாகவும் $\sqrt{(a^2+b^2)}$-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தில் வெட்டும்.

16. (x_1, y_1)-லிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$க்கு வரையும் தொடு வரைகளின் சமன்பாடு.

$(x_1\ y_1)$ வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad \dots (1)$$

எனக் கொள்வோம்,

இக் கோட்டில் (x_1, y_1)-லிருந்து r தொலைக்கப்பால் உள்ள புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$ ஆகும்.

இப் புள்ளி நீள்வட்டத்தில் இருந்தால்,

$$\frac{(x_1 + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r\sin\theta)^2}{b^2} = 1.$$

$$(\text{அ-து}) \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)r^2 + 2\left(\frac{x_1\cos\theta}{a^2} + \frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right)r$$

$$+ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \dots\dots (2)$$

(1) கோடு நீள்வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால், OP, OQ நீளங்களை (2) சமன்பாட்டால் கணக்கிடலாம். இக் கோடு நீள்வட்டத்தைத் தொட்டால் P, Q புள்ளிகள் ஒன்று படும். அந்நிலையில் OP, OQ நீளங்கள் சமமாகும்.

(2) சமன்பாட்டுக்கு இரு சமத் தீர்வுகள் உண்டு.

$$\therefore \left(\frac{x_1 \cos\theta}{a^2} + \frac{y_1 \sin\theta}{b^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) \quad \ldots\ldots (3)$$

இச் சமன்பாட்டினால் (x_1, y_1)-லிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் போக்கினைக் காணலாம்.

$\cos\theta$, $\sin\theta$-க்குப் பதில் நிரலே $\frac{x - x_1}{r}$, $\frac{y - y_1}{r}$-ஐ (2) ல் ஈடாக்கின், O-லிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடு வரைகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

∴ தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$$\left\{\frac{x_1(x - x_1)}{a^2} + \frac{y_1(y - y_1)}{b^2}\right\}^2 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\left\{\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2}\right\}$$

(அ-து) $$\left\{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)\right\}^2 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2}\right) + \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)\right\}$$

(அ-து) $(T - S_1)^2 = S_1(S - 2T + S_1)$

(அ-து) $T^2 = SS_1$

இங்கு $T = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1$, $S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$,

$$S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1.$$

மாதிரி 4

உயிர் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினை இத் தேற்றத்தாலும் காண்க.

(x_1, y_1)-லிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2}-1\right)=\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)^2.$$

இத் தொடுவரைகளின் இடைப்பட்ட கோணம் 90° என்றால் x^2-ன் கெழு + y^2-ன் கெழு = 0.

$$\therefore\ \frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)-\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)$$

$$-\frac{y_1^2}{b^4}=0.$$

(அ-து) $\dfrac{x_1^2+y_1^2}{a^2b^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$.

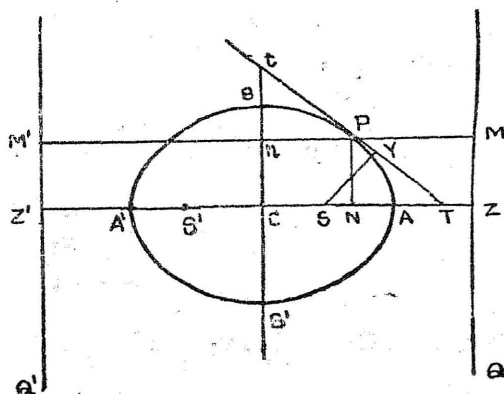
(அ-து) $x_1^2+y_1^2=a^2+b^2$

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவரை $x^2+y^2=a^2+b^2$.

குறிப்பு: பரவளையத்தின் உயிர்வட்டம் அதன் உயிர்க் கோடாகும்.

17. வடிவ கணிதப் பண்புகள்.

இப் படத்தில் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, உயிர்ப் புள்ளிகள் S, S', அவற்றின் ஒத்த உயிர்க்கோடுகள் QZ, Q'Z', P (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை PT, CA-ஐ T-யிலும், CB-ஐ t-யிலும் வெட்டட்டும். P-ன் குத்தாயம் PN ஆகும்.



படம்-89

(1) $SP + S'P = 2a$

$$SP = e \,.\, PM$$
$$= e\,(nM - x_1)$$
$$= e\,(CZ - x_1)$$
$$= e\left(\frac{a}{e} - x_1\right)$$
$$= a - ex_1$$

$$S'P = e\, PM'$$
$$= e\left(\frac{a}{e} + x_1\right)$$
$$= a + ex_1$$

$$\therefore\ SP + S'P = a - ex_1 + a + ex_1 = 2a.$$

இவ் வடிவ கணிதப் பண்பால் நீள்வட்டம் வரையறுக்கப் படுவதும் உண்டு. இருநிலைப் புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைகள் தம் கூட்டுத்தொகை மாரு ராசி எனின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நீள்வட்டமாகும்.

(2) P-யிலிருந்து CB-க்கு நேர் குத்துக்கோடு Pn என்க. $CN \,.\, CT = a^2$, $Cn \,.\, Ct = b^2$

P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

T இடத்து $y = 0$ $\quad\therefore\ \dfrac{CT \,.\, x_1}{a^2} = 1$

$$\therefore\ CT = \frac{a^2}{x_1}$$
$$CN = x_1$$

ஆகவே, $CT \,.\, CN = \dfrac{a^2}{x_1} \,.\, x_1 = a^2$

இவ்வாறே, $Ct \,.\, Cn = b^2$.

(3) உயிர்ப் புள்ளிகளிலிருந்து நீள்வட்டத் தொடுவரை ஒன்றுக்கு வரையும் SY, S'Y' நேர்குத்துக்கோடுகளின் பெருக்கத் தொகை மாரு ராசியாகும்.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனக் கொண்டால், உயிர்ப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$.

நீள்வட்டத்தின் தொடுவரை யொன்றின் சமன்பாடு $y = mx + \sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$(-ae, 0)$, $(ae, 0)$-லிருந்து இத் தொடுவரைக்கு வரையும் நேர்க்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் நிரலை

$$\frac{-mae + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \frac{mae + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$$ ஆகும்.

∴ இந் நீளங்களின் பெருக்கத் தொகை

$$= \frac{-m^2a^2e^2 + a^2m^2 + b^2}{1 + m^2}$$

$$= \frac{a^2m^2(1 - e^2) + b^2}{1 + m^2}$$

$$= \frac{m^2b^2 + b^2}{1 + m^2}, \quad \left[\because \; a^2(1 - e^2) = b^2\right]$$

$$= b^2.$$

(4) Y, Y′-ன் இயங்குவரை ஒரு வட்டமாகும்.
தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

S வழி இத் தொடுவரைக்கு நேர்குத்துக்கோடு

$$y = -\frac{1}{m}(x - ae)$$

(அ-து) $my + x = ae$ ...... (2)

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து m-ஐ அகற்றின் Y-ன் இயங்குவரை வரும்.

(1), (2) சமன்பாடுகளின் தன் பெருக்கங்களைக் கூட்டினால்

$$(y - mx)^2 + (my + x)^2 = a^2m^2 + b^2 + a^2e^2$$

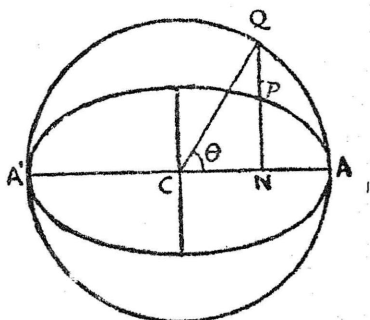
(அ-து) $y^2(1 + m^2) + x^2(1 + m^2) = a^2(1 + m^2)$,

(அ-து) $x^2 + y^2 = a^2$.

இவ்வாறே Y'-ன் இயங்குவரையும் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டமென நிறுவலாம். இவ் வட்டம் நீள்வட்டத்து நெட்டச்சு AA'-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாகும். இவ் வட்டம் நீள்வட்டத்தின் உதவிவட்டம் (Auxiliary Circle) எனப்படும்.

18. மையக் கோணம் (Eccentric Angle)

நீள்வட்டத்து P புள்ளியின் குத்தாய நீட்சி உதவி வட்டத்தினை Q-ல் வெட்டுமெனக் கொள்வோம். அந் நிலையில் ACQ கோணம் P புள்ளியின் மையக் கோணம் (Eccentric Angle) எனப்படும்.



படம் - 90

A-லிருந்து புறப்பட்டு நீள்வட்டவரையில் இடமாக P சுற்றி மீண்டும் A-ல் வரின், அதன் மைய கோணம் 0-லிருந்து 2π-க்குக் கூடிக்கொண்டே போகும்.

P புள்ளி (x, y) எனின் $x = CN = a\cos\theta$

P நீள்வட்டத்தில் இருப்பதால் $\dfrac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\therefore\ y = \pm b\sin\theta.$$

இங்கு y-ன் மதிப்பு மிகையாகையால் P-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ஆகும். ஆகவே, நீள்வட்டத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ ஆகும்.

இவற்றிலிருந்து θ-வை அகற்றின் $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்று வரும். $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ புள்ளியை 'θ' என்று சொல்வது மரபு.

19. நீள்வட்டம், அதன் உதவி வட்டம் இவற்றிலுள்ள ஒத்த இரு புள்ளிகளின் குத்தாயங்கள் PN, QN எனின்

$$NP = b\sin\theta,\quad NQ = a\sin\theta$$

$$\therefore\ \frac{NP}{NQ} = \frac{b}{a}.$$

இப் பண்பினாலும் நீள்வட்டத்தினை வரையறுக்கலாம். ஒரு வட்டத்தின் புள்ளிகளிலிருந்து அதன் விட்டமொன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோடுகளை, குறித்த தகவுப்படி அகத்தும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் இயங்குவரை, இவ் வட்டத்தை உதவி வட்டமாகக் கொண்ட ஒரு நீள் வட்டமாகும்.

20. 'θ', 'ϕ', மையக் கோணங்களுடைய புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடு.

இப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ ஆகையால், இவற்றை இணைக்குங் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - a\cos\theta}{a(\cos\theta - \cos\phi)} = \frac{y - b\sin\theta}{b(\sin\theta - \sin\phi)}$$

(அ-து)

$$\frac{x - a\cos\theta}{2a\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cdot\sin\frac{\phi-\theta}{2}} = \frac{y - b\sin\theta}{2b\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\phi}{2}}$$

இச் சமன்பாட்டினைச் சுருக்கி எழுதினால்

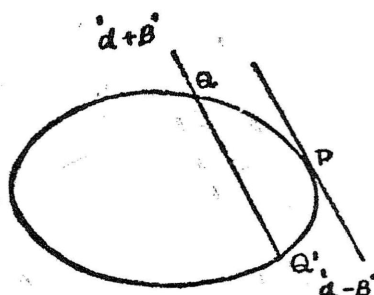
$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2} = \cos\frac{\theta-\phi}{2} \qquad \ldots\ldots (1)$$

என்று வரும்.

'ϕ' புள்ளி 'θ' புள்ளியோடு ஒன்றுபடும்பொழுது $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ இடத்துத் தொடுவரை கிடைக்கும். (1) சமன்பாட்டில் $\phi = \theta$ என ஈடாக்கின் 'θ' இடத்துத் தொடுவரை தோன்றும்.

$\therefore$ 'θ' இடத்துத் தொடுவரை $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$

21. Q, Q' புள்ளிகளின் மையக் கோணங்கள் $\alpha-\beta$, $\alpha+\beta$ என்றால், QQ'-ன் சமன்பாடு முந்தின பகுதி (1)-ல் $\theta = \alpha+\beta$, $\phi = \alpha - \beta$-என ஈடாக்கின் கிடைக்கும்.



படம்-91

$\therefore$ QQ'ன் சமன்பாடு $\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\sin\alpha = \cos\beta$ (1)

P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு பெற (1)-ல் $\beta = 0$ என ஈடாக்கல் வேண்டும்.

'α' இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\sin\alpha = 1.$$

'α' புள்ளி P எனக் கொள்க.

QQ', P இடத்துத் தொடுவரைக்கு ஒருபோகான கோடாகும். α-வை நிலையாகக் கொண்டு β க்குப் பன் மதிப்புகள் கொடுத்தால் P இடத்துத் தொடுவரைக்கு ஒருபோகான நாண்களின் சமன் பாடுகள் வரும். இந் நாண் நுனிகளின் மைய கோணங்கள் தம் கூட்டுத் தொகை ($\alpha + \beta + \alpha - \beta$, அஃதாவது 2α) நிலைத்த தாகும். ஆகவே, ஒருபோகான நாண் நுனிகளின் மையக் கோணக் கூட்டுத் தொகை நிலைத்ததாகவும், அந் நாண்களுக்கு ஒருபோகான தொடுவரை தொடுகுத்து மைய கோணத்தின் இரு மடங்காகவும் இருக்கும்.

22. 'θ', 'ϕ' இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி.

'θ', 'ϕ' இடத்துத் தொடுவரைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

$$\frac{x}{a}\cos\phi + \frac{y}{b}\sin\phi = 1$$

இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் அத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி கிடைக்கும்.

$$\text{(அ-து)} \quad \left(\frac{a \cos \frac{\theta+\phi}{2}}{\cos \frac{\theta-\phi}{2}}, \frac{b \sin \frac{\theta+\phi}{2}}{\cos \frac{\theta-\phi}{2}} \right) \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ மையக் கோணங்களுடைப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி

$(a \cos \alpha \sec \beta, \ b \sin \alpha \sec \beta)$ ஆகும்.

மாதிரி 5

$lx + my + n = 0$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐத் தொட்டால் $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$ என நிறுவுக.

$$lx + my + n = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

கோடு நீள்வட்டத்தை 'θ' புள்ளியிடத்துத் தொடுமெனக் கொள்க.

'θ' இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \qquad \ldots\ldots (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{l}{\frac{\cos \theta}{a}} = \frac{m}{\frac{\sin \theta}{b}} = \frac{n}{-1}$$

$$\therefore \quad \cos \theta = -\frac{al}{n}, \ \sin \theta = -\frac{bm}{n}.$$

$$\therefore \quad \left(-\frac{al}{n}\right)^2 + \left(-\frac{bm}{n}\right)^2 = 1$$

(அ-து) $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$

மாதிரி 6

இரு புள்ளிகளின் மையக் கோணங்கள் தம் வேற்றுமைத் தொகை நிலைத்ததாகின், அப் புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடு ஒரு நிலைத்த நீள்வட்டத்தினைத் தொடுமென நிறுவுக.

அப் புள்ளிகளின் மையக் கோணங்களை $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ எனக் கொண்டால் $(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) =$ நிலையெண்

(அ-து) $2\beta =$ நிலையெண்

இந் நிலேயெண்ணே $2k$ எனக் கொண்டால்

$$\beta = k.$$

அப் புள்ளிகளே இணேக்குங் கோடு

$$\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\sin\alpha = \cos\beta.$$

(அ-து) $\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\sin\alpha = \cos k.$

(அ-து) $\frac{x}{a\cos k}\cdot\cos\alpha + \frac{y}{b\cos k}\sin\alpha = 1.$

$\therefore$ இக் கோடு $\frac{x^2}{(a\cos k)^2} + \frac{y^2}{(b\cos k)^2} = 1$-ஐத் தொடும்.

மாதிரி 7

நீள்வட்டத்துப் புள்ளி இரண்டின் மைய கோணங்கள் தம் வேற்றுமைத்தொகை மாரு ராசியெனின் அப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நீள் வட்டமென நிறுவுக.

அவ்விரண்டு புள்ளிகள் '$\alpha + \beta$', '$\alpha - \beta$' எனவும், அப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி P (x_1, y_1) எனவும் கொள்க.

$(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) =$ நிலேயெண்

இந் நிலேயெண்ணே $2k$ எனக் கொண்டால்

$$\beta = k. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$x_1 = a\cos\alpha\sec\beta \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$y_1 = b\sin\alpha\sec\beta \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து α, β-வை அகற்றுக.

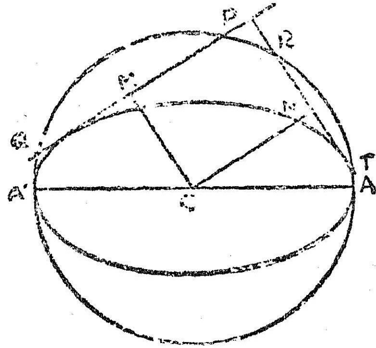
$$x_1 = a\cos\alpha\sec k,\ y_1 = b\sin\alpha\sec k.$$

$$\therefore \left(\frac{x_1}{a\sec k}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b\sec k}\right)^2 = 1$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 k.$

மாதிரி 8

நீள்வட்டத்து இரு தொடுவரைகள் செங்கோணத்தில் வெட்டின், அவை உதவி வட்டத்தில் பிறப்பிக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளின் தன் பெருக்கங்கள் கூடிய தொகை மாறு ராசியென நிறுவுக.



தொடுவரைகள் செங்கோணத்தில் வெட்டுவதால் அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

படம் 92.

$$y = -\frac{1}{m}x + \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}$$ எனக் கொள்ளலாம்.

இத் தொடுவரைகள் உதவி வட்டத்தில் பிறப்பிக்கும் வெட்டுத் துண்டுகள் PQ, RT ஆகும்.

C-லிருந்து தொடுவரைகளுக்கு CM, CN நேர்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

$$PQ^2 = 4\,PM^2$$

$$= 4\,(CP^2 - CM^2)$$

$$RT^2 = 4\,(CR^2 - CN^2)$$

$$\therefore\ PQ^2 + RT^2 = 4\,(CP^2 + CR^2 - CM^2 - CN^2).$$

$$= 4\,(2a^2 - CM^2 - CN^2).$$

$$CM = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}},\ CN = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2m^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$\therefore \quad PQ^2 + RT^2 = 4\left(2a^2 - \frac{a^2m^2 + b^2}{1 + m^2} - \frac{a^2 + b^2m^2}{1 + m^2}\right)$$

$$= 4\,(2a^2 - \overline{a^2 + b^2})$$
$$= 4\,(a^2 - b^2)$$

23. 'θ' இடத்துச் செங்கோடு—

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் 'θ' இடத்துத் தொடுவரை

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

$\therefore$ இத் தொடுவரையின் 'm' $= -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$

$\therefore$ 'θ' இடத்துச் செங்கோட்டின் 'm' $= \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}$

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - b\sin\theta = \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(x - a\cos\theta)$$

(அ-து) $ax\sin\theta - by\cos\theta = (a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta.$

(அ-து) $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$

மாதிரி 9

$lx + my + n = 0$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

நீள்வட்டத்துச் செங்கோடாயின்

$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$ என நிறுவுக.

நீள்வட்டத்தின் 'θ' இடத்துச் செங்கோடு

$$lx + my + n = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

எனக் கொள்க.

'θ' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \qquad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{l}{\frac{a}{\cos\theta}} = \frac{m}{\frac{-b}{\sin\theta}} = \frac{-n}{a^2 - b^2}.$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{-an}{l(a^2 - b^2)};\ \sin\theta = \frac{bn}{m(a^2 - b^2)}$$

$$\therefore \frac{a^2 n^2}{l^2 (a^2 - b^2)^2} + \frac{b^2 n^2}{m^2 (a^2 - b^2)^2} = 1$$

(அ-து) $$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$$

மாதிரி 10

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டச் செங்கோடு ஒன்று ஆயத்தோடு 45° பிறப்பிப்பின் அதன் நீளத்தின் தன் பெருக்கம் $\frac{32a^4b^4}{(a^2 + b^2)^3}$ என நிறுவுக.

செங்கோடு ஆயத்தோடு 45° பிறப்பிப்பதால் அதன் 'm' $= 1$. ஆகவே, அதன் சமன்பாடு $y = x + c$

இக் கோடு நீள்வட்டத்தின் செங்கோடாயின்

$$\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{c^2}, \quad \left\{\text{முந்திய பயிற்சி கட்டுப்பாடு}\right\}$$

$$\therefore c^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)}$$

இக் கோடு நீள்வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = x + c$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் கிடைக்கும். அப் புள்ளிகள் (x_1, y_1) (x_2, y_2) எனக் கொள்க. இக் கோட்டின் நீளம் d எனின்

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

(x_1, y_1) (x_2, y_2) புள்ளிகள் $y = x + c$-ல் இருப்பதால் $y_1 = x_1 + c$, $y_2 = x_2 + c$

$$\therefore y_1 - y_2 = x_1 - x_2$$

ஆகவே, $d^2 = 2(x_1 - x_2)^2$

x_1, x_2 தீர்வுகள் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(x + c)^2}{b^2} = 1$ சமன்பாட்டை விடுவிக்க வரும்.

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \frac{2cx}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} - 1 = 0.$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = \frac{-2c}{b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}, \quad x_1 x_2 = \frac{c^2 - b^2}{b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

$$\therefore \quad d^2 = 2\left\{\frac{4c^2}{b^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} - \frac{4(c^2-b^2)}{b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\right\}$$

$$= 8\,\frac{c^2 - (c^2-b^2)\,b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}{b^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}$$

$$= \frac{8a^4}{(a^2+b^2)^2}\left\{c^2 - c^2\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right) + \frac{b^4(a^2+b^2)}{a^2 b^2}\right\}$$

$$= \frac{8a^4}{(a^2+b^2)^2}\left\{\frac{(a^2+b^2)\,b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\cdot c^2\right\}$$

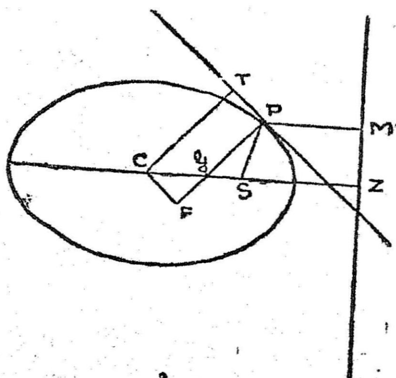
$$= \frac{8a^2 b^2}{(a^2+b^2)^2}\left\{a^2+b^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}\right\}$$

$$= \frac{8a^2 b^2}{(a^2+b^2)^3}\cdot\left\{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2\right\}$$

$$= \frac{32a^4 b^4}{(a^2+b^2)^3}.$$

24. நீள்வட்டத்தின் சில பண்புகள் :

(1) நீள்வட்டத்தின் P இடத்துச் செங்கோடு நெட்டச்சினை G-ல் வெட்டின் SG = e SP.



படம்-93

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

P $(a \cos \theta,\ b \sin \theta)$ எனக் கொள்க.

P இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2.$$

இச் செங்கோடு நெட்டச்சினை G-ல் வெட்டுவதால்

$$\frac{a \cdot CG}{\cos \theta} = a^2 - b^2.$$

$$\therefore\ CG = ae^2 \cos \theta.$$

$$GS = CS - CG$$

$$= ae - ae^2 \cos \theta.$$

$$= ae\,(1 - e \cos \theta)$$

$$\frac{SP}{PM} = e$$

$$SP = e \,.\, PM$$

$$= e\,(CZ - a \cos \theta)$$

$$= e\left(\frac{a}{e} - a \cos \theta\right)$$

$$= (a - ae \cos \theta)$$

$$= a\,(1 - e \cos \theta)$$

$$\therefore\ GS = e \,.\, SP.$$

(2) P இடத்துச் செங்கோடு நெட்டச்சை G-ல் வெட்டுகிறது. இச் செங்கோட்டுக்கு C-லிருந்து வரையும் நேர்குத்துக்கோடு CF எனின், $PF \,.\, PG = b^2.$

P இடத்துத் தொடுவரை $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1.$

C-லிருந்து இத் தொடுவரைக்கு CT-ஐ நேர்குத்தாக வரைக.

$$PF = CT$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}$$

P இடத்துச் செங்கோடு $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$.

$y = 0$ எனின், $CG = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos\theta$.

$$\therefore\ PG^2 = \left(a\cos\theta - \frac{a^2 - b^2}{a}\cos\theta\right)^2 + b^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{b^4\cos^2\theta}{a^2} + b^2\sin^2\theta$$

(அ-து) $PG = \frac{b}{a}\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$

$\therefore\ PG.\ PF = b^2$.

25. நீள்வட்டத்தின் நான்கு செங்கோடுகள் குறித்த புள்ளி வழிச் செல்லும்.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, குறித்த புள்ளி (h, k) எனவும், நீள்வட்டத்தின் 'θ' இடத்துச் செங்கோடு இப் புள்ளி வழிச் செல்லும் எனவும் கொள்க.

'θ' இடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2.$$

இக் கோடு (h, k) வழிச் செல்வதால்

$$\frac{ah}{\cos\theta} - \frac{bk}{\sin\theta} = a^2 - b^2.$$

இச் சமன்பாட்டை $\dfrac{ah}{\dfrac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}} - \dfrac{bk}{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}} = a^2e^2$

என்று எழுதலாம்.

(அ-து) $$\frac{ah\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}} - \frac{bk\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\tan\frac{\theta}{2}} = a^2e^2$$

(அ-து) $bk\tan^4\frac{\theta}{2}+2(ah+a^2e^2)\tan^3\frac{\theta}{2}+$

$2(ah-a^2e^2)\tan\frac{\theta}{2}-bk=0$. ஆகவே, $\tan\frac{\theta}{2}$-க்கு நான்கு மதிப்புகள் உண்டு. அம் மதிப்புகளில் ஒன்று 't_1' எனக் கொண்டால்

$$\tan\frac{\theta}{2}=t_1$$

$$\therefore\quad \theta/2=n\pi+\tan^{-1}t_1$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi+2\tan^{-1}t_1$$

ஒரு புள்ளியின் மைய கோணத்தோடு 2π-ன் மடங்குகளைக் கூட்டின், அப் புள்ளியின் மைய கோணம்தான் கிடைக்கும். ஆகவே, $\tan\frac{\theta}{2}$ – ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் நீள்வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியைக் கொடுக்கும். எனவே, நீள்வட்டத்தின் நான்கு செங்கோடுகள் (h, k) வழிச் செல்லும்.

மாதிரி 11

ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லும் நாற் செங்கோட்டின் அடிகள் தம் மைய கோணங்கள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ எனின், $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, π-ன் ஒற்றை மடங்காகும் என நிறுவுக.

செங்கோடுகள் செல்லும் புள்ளி (h, k) எனின் $\tan\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\gamma}{2}$, $\tan\frac{\delta}{2}$
$bk\,t^4+2(ah+a^2e^2)t^3+2(ah-a^2e^2)t-bk=0$ சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனக் கண்டோம்.

$$\therefore\quad \Sigma\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=0.$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\delta}{2}=-1$$

$$\therefore\quad 1-\Sigma\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}=0.$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right) = \infty$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \frac{\pi}{2}\text{-ன் ஒற்றை மடங்கு}$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi\text{-ன் ஒற்றை மடங்கு.}$$

மாதிரி 12

'α', 'β', 'γ' இடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால் $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = 0$ என நிறுவுக.

'α', 'β', 'γ' புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) வழிச் செல்லும், எனவும், (h, k)-லிருந்து வரையும் நான்காவது செங்கோட்டின் அடி, 'δ' எனவும் கொள்க.

இந் நிலையில் $$\Sigma \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\delta}{2} = -1 \quad \ldots\ldots (2)$$

(1), (2)-லிருந்து $\tan\frac{\delta}{2}$ஐ அகற்றின் கிடைப்பது

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$$

$$-\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right) = 0$$

(அ-து) $$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$$

$$-\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} - \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma}{2} - \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} = 0$$

(அ-து) $$\sum\left(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} - \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\right) = 0$$

(அ-து) $$\sum \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = 0.$$

(அ-து) $$\sum \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha.\ \sin\beta} = 0$$

(அ-து) $$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} + \frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha} = 0.$$

(அ-து) $$\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)+\sin\alpha(\cos\beta+\cos\gamma) + \sin\beta(\cos\gamma+\cos\alpha) = 0.$$

$$\therefore \quad \operatorname{Sin}(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = 0.$$

26. ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லும் நான்கு செங்கோடுகளின் அடிகள் ஒரு கூம்பு வெட்டியில் இருக்கும்.

(x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y} = a^2 - b^2.$$

இது (h, k) வழிச் சென்றால்

$$\frac{a^2h}{x_1} - \frac{b^2k}{y_1} = a^2 - b^2$$

அ∴தாவது (h, k) வழிச் செல்லும் நான்கு செங்கோடுகளின் அடிகளின் ஆயத்தொலைகள் : $\frac{a^2h}{x} - \frac{b^2k}{y} = a^2 - b^2$ சமன்பாட்டில் பொருந்த வேண்டும்.

இச் சமன்பாட்டைச் சுருக்கினால் $(a^2-b^2)\ xy+b^2\ kx-a^2hy = 0$ என்று வரும். இது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால் ஒரு கூம்புவெட்டியைக் குறிக்கும்.

இக் கூம்புவெட்டி (h, k), நீள்வட்டத்தின் மையம் இப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.

மாதிரி 13

$\frac{lx}{a}+\frac{my}{b}=1$, $\frac{x}{la}+\frac{y}{mb}+1=0$ கோடுகள் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி நான்கிடத்துச் செங்கோடுகளும் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

$\frac{lx}{a}+\frac{my}{b}=1$ கோடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியிடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) வழிச் செல்லும் எனவும், (h, k)-லிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் மற்ற இரு செங்கோடுகளின் அடிகளை இணைக்குங்கோடு $\frac{px}{a}+\frac{qy}{b}=1$ எனவும் கொள்வோம்.

இக் கோடுகளும் நீள்வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்புவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda\left(\frac{lx}{a}+\frac{my}{b}-1\right)\left(\frac{px}{a}+\frac{qy}{b}-1\right)=0.$$

இவற்றுள், $(a^2-b^2)\,xy+b^2kx-a^2hy=0$, ஒன்றாக இருத்தல் வேண்டும்.

அதற்கு x^2-ன் கெழுவும், y^2-ன் கெழுவும், எண்ணுறுப்பும் சூன்னமாதல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{a^2}+\frac{\lambda lp}{a^2}=0$$

$$\frac{1}{b^2}+\frac{\lambda mq}{b^2}=0$$

$$-1+\lambda=0$$

$$\therefore \quad \lambda=1,\ p=-\frac{1}{l},\ q=-\frac{1}{m}$$

$\therefore$ $\frac{px}{a}+\frac{qy}{b}=1$ கோட்டின் சமன்பாட்டில் இம் மதிப்புகளை இடாக்கின் கோட்டின் சமன்பாடு

$$-\frac{x}{la}-\frac{y}{mb}=1$$

(அ-து) $$\frac{x}{la}+\frac{y}{mb}+1=0.$$

மாதிரி 14

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் சென்றால், $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = 4$ என்று நிறுவுக.

இப் புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) வழிச் சென்றால், இப் புள்ளிகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots (1)$$

$$(a^2 - b^2)\, xy + b^2kx - a^2hy = 0. \qquad \ldots (2)$$

கூம்பு வெட்டி இவை வெட்டும் புள்ளிகளாகும்.

∴ இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து y-ஐ அகற்றினால் x_1, x_2, x_3, x_4, தீர்வுகளாக உள்ள ஒரு நாற்படிச் சமன்பாடு வரும்.

(2)-லிருந்து $y\,[\,(a^2 - b^2)\,x - a^2h] = -\,b^2kx$

$$\therefore \quad y = \frac{b^2kx}{a^2h - (a^2 - b^2)x}$$

$$(\text{அ-து}) \quad y = \frac{b^2kx}{a^2h - a^2e^2x}$$

இம் மதிப்பை (1)-ல் ஈடாக்கின்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^4k^2x^2}{(a^2h - a^2e^2x)^2b^2} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2k^2x^2}{a^4\,(h - e^2x)^2} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad a^2x^2(h - e^2x)^2 + b^2k^2x^2 = a^4\,(h - e^2x)^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad a^2e^4x^4 - 2a^2e^2hx^3 + (a^2h^2 + b^2k^2 - a^4e^4)x^2 + 2a^4\,e^2hx - a^4h^2 = 0.$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2a^2e^2h}{a^2e^4} = \frac{2h}{e^2}$$

$$\Sigma\, x_1x_2x_3 = -\,\frac{2a^4\,e^2h}{a^2e^4} = -\,\frac{2a^2h}{e^2}$$

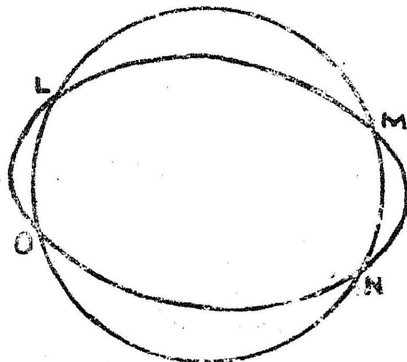
$$x_1x_2x_3x_4 = -\,\frac{a^4h^2}{a^2e^4} = -\,\frac{a^2h^2}{e^4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} = -\frac{2a^2h}{e^2} \div \left(-\frac{a^2h^2}{e^4}\right) = \frac{2e^2}{h}.$$

ஆகவே, $(x_1+x_2+x_3+x_4)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)$

$$= \frac{2h}{e^2} \cdot \frac{2e^2}{h} = 4.$$

27. ஒரு வட்டம் ஒரு நீள்வட்டத்தை நாற்புள்ளிகளில் வெட்டும். அவற்றின் மையகோணங்கள் கூடிய தொகை π-ன் இரட்டை மடங்காகும்.



படம் - 94

வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (1)

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... (2)

அவை வெட்டும் புள்ளிகள் L, M, N, O எனக் கொள்க. L,M,N,O புள்ளிகளின் மையக் கோணங்களை (1)-ல் $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$-ஐ ஈடாக்க வரும் சமன்பாட்டால் காணலாம்.
அச் சமன்பாடு

$$a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ga\cos\theta + 2fb\sin\theta + c = 0$$

இச் சமன்பாட்டில் $\tan(\theta/2) = t$ எனக் கொண்டால்

$$a^2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + b^2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + 2ga\,\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$+ 2fb\,\frac{2t}{1+t^2} + c = 0$$

(அ-து) $a^2(1-t^2)^2 + b^2(2t)^2 + 2ga(1-t^2)(1+t^2)$
$+2fb(2t)(1+t^2) + c(1+t^2)^2 = 0.$

(அ-து) $(a^2 + c - 2ag)t^4 + 4fbt^3 + 2(c + 2b^2 - a^2)t^2 + 4fbt$
$+ (c + a^2 + 2ag) = 0$ ...(3)

இது நாற்படிச் சமன்பாடு ஆகையால் நான்கு தீர்வுகள் (மெய் அல்லது கற்பனை) உண்டு தீர்வு ஒவ்வொன்றும் நீள் வட்டத்தின் புள்ளியொன்றின் மைய கோணத்தைத் தரும். ஆகவே, ஒரு வட்டம் நீள்வட்டம் ஒன்றை நாற்புள்ளிகளில் வெட்டும். (3)-ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 என்றால்

$$\sum t_1 = -\frac{4fb}{a^2 + c - 2ag}$$

$$\sum t_1 t_2 t_3 = -\frac{4fb}{a^2 + c - 2ag}$$

$$\therefore \Sigma t_1 = \Sigma t_1 t_2 t_3.$$

இத் தீர்வுகள் தரும் மைய கோணங்கள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θ_4 என்றால்

$$\Sigma \tan\frac{\theta_1}{2} = \Sigma \tan\frac{\theta_1}{2} \cdot \tan\frac{\theta_2}{2} \cdot \tan\frac{\theta_3}{2}.$$

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2}\right)$$

$$= \frac{\Sigma \tan\theta_1 - \Sigma \tan\frac{\theta_1}{2} . \tan\frac{\theta_2}{2} \tan\frac{\theta_3}{2}}{1 - \Sigma \frac{\theta_1}{2} . \tan\frac{\theta_2}{2} + \tan\frac{\theta_1}{2} . \tan\frac{\theta_2}{2} . \tan\frac{\theta_3}{2} . \tan\frac{\theta_4}{2}} = 0.$$

$$\therefore \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} = n\pi, \text{ (}n\text{ ஒரு முழு எண்)}$$

$$\therefore \theta_1 + {}_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2n\pi$$

∴ மையக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை π-ன் இரட்டை மடங்காகும்.

மாதிரி 15

நீள்வட்டத்தின் L, M, N, O புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தில் இருந்தால் LMNO நாற்சிறையின் எதிர்ப் பக்கங்கள் நீள்வட்ட ஆயத்தோடு சமச்சாய்வுடையனவாக இருக்குமென நிறுவுக.

L, M, N, O புள்ளிகளின் மைய கோணங்கள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, எனின் $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=2n\pi$ எனக் கண்டோம்.

LM-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

$$\therefore \text{LM-ன் } `m' = -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

இம் மாதிரியே NO-ன் $`m' = -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$

$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=2n\pi$ ஆகையால்

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=n\pi-\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$$

$$\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\cot\left(n\pi-\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)=-\cot\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$$

$\therefore$ LM-ன் 'm' = — NO-ன் 'm'

$\therefore$ LM, NO கோடுகள் ஆயத்தோடு சமச்சாய்வுடையனவாக இருக்கும்.

மாதிரி 16

நீள்வட்டத்தின் L, M, N, O புள்ளிகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும் செங்கோடுகளின் அடிகளாகும். L, M, N வழிச் செல்லும் வட்டம் நீள்வட்டத்தை O'-ல் மீண்டும் வெட்டின் OO' நீள்வட்டத்தின் விட்டமென நிறுவுக.

L, M, N, O புள்ளிகளின் மைய கோணங்கள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்றால்,

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$-ன் ஒற்றை மடங்கு.

O'-ன் மையகோணம் δ' என்றால்,

$\alpha+\beta+\gamma+\delta'=\pi$-ன் இரட்டை மடங்கு

$\therefore \delta-\delta'=\pi$-ன் ஒற்றை மடங்கு$-\pi$-ன் இரட்டை மடங்கு

$=\pi$-ன் ஒற்றை மடங்கு

$\therefore$ O, O' புள்ளிகள் நீள்வட்ட விட்டமொன்றின் நுனிகளாகும்.

பயிற்சிகள் 17.

1. $9x^2 + 16y^2 = 144$ நீள்வட்டத்துக்கு $y = x + c$ தொடு வரையாதற்கு c-ன் மதிப்பு என்ன?

2. $4x + 3y = 11$ கோடு $2x^2 + 3y^2 = 11$ நீள்வட்டத்தின் தொடுவரை என நிறுவுக. தொடுகுத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

3. ஆயத்தோடு $60°$ பிறப்பிக்கும் $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ நீள்வட்டத்தின் தொடுவரைகள்தம் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

4. $(2,3)$ புள்ளியிலிருந்து $9x^2 + 16y^2 = 144$ நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

5. $2x^2 + y^2 = 2$ நீள்வட்டத்தின் செங்கோடுகள் நெட்டச்சோடு $45°$ சாய்ந்திருப்பின் அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6. நீள்வட்டத்தின் 'θ_1', 'θ_2', 'θ_3' புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$2ab \sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} . \sin\frac{\theta_2 - \theta_3}{2} . \sin\frac{\theta_3 - \theta_1}{2}$$ என நிறுவுக.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்து நேரகல நுனிகளின் மைய கோணங்களைக் காண்க.

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டம் அதன் உதவி வட்டம் இடைப்பட்ட நீள்வட்ட நேரகலத்தின் நீளம் $2b\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ என நிறுவுக.

9. நீள்வட்ட நேரகல நுனியிடத்துத் தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைத்தகவு என நிறுவுக.

10. $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தைத் தொட்டால் $p^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$ என நிறுவுக.

11. குறித்த இரு புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைகள் கூடிய தொகை மாரு ராசியெனின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நீள்வட்டமென நிறுவுக.

12. நீள்வட்ட உயிர்ப் புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு தொடு வரைக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகள் SY, S′ Y′; P இடத்துச் செங்கோடு நெட்டச்சினை வெட்டும் புள்ளி G எனின்

$\frac{1}{SY} + \frac{1}{S'Y'} = \frac{2}{PG}$ என நிறுவுக.

13. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் நேர்குத்தான POP′, QOQ′ இரு நாண்கள் நிலைப்புள்ளி O வழிச்செல்லின் $\frac{1}{PO.OP'} + \frac{1}{QO\ .\ OQ'}$ = மாரு ராசியென நிறுவுக.

14. நேர்குத்தான இருநிலைக் கோடுகளில் நுனிகள் இருக்குமாறு ஒரு கோடு இயங்குமாயின், அக் கோட்டில் குறித்த ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நீள்வட்டமென நிறுவுக. கோட்டின் நீளம் 20 அங்குலம். நுனி ஒன்றிலிருந்து குறித்த புள்ளியின் தொலை 8 அங்குலம் எனின், நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைத்தகவு யாது ?

15. குறித்த புள்ளியையும், குறித்த கோட்டையும் நிரலே உயிர்ப்புள்ளியும் உயிர்க்கோடும் ஆகக் கொண்ட நீள்வட்டக் குற்றச்சு நுனியின் இயங்குவரை என்ன ?

16. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் உயிர்ப் புள்ளி நாண் ஒன்றின் நுனிகள் தம் மையக் கோணங்கள் α, β எனின்

$\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = e \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$ என நிறுவுக

17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்ட உயிர்ப்புள்ளி நாணுக்கு அதன் நுனிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி நீள்வட்ட மையம் இவற்றிலிருந்து வரையும் நேர் குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் நிரலே p, q எனின் $pq = b^2$ என நிறுவுக.

18. ஒரு நீள்வட்ட விட்டத்தின் நீளம் d எனின் இவ் விட்டத்துக்கு ஒருபோகான உயிர்ப்புள்ளி வழி நாண் நீளம் $\frac{2d^2}{a}$ என நிறுவுக. இங்கு $2a$ நீள்வட்ட நெட்டச்சின் நீளமாகும்.

19. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-ன் α, β மைய கோணங்களுடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு நெட்டச்சில் ஒருநிலைப் புள்ளி வழிச் சென்றால் $\tan\frac{\alpha}{2} . \tan\frac{\beta}{2}$ -ன் மதிப்பு நிலையாகும் என நிறுவுக.

20. ஒரு நீள்வட்டத்தின் PSP′, QSQ′ உயிர்ப்புள்ளி நாண்கள். PQ விட்டம் எனின் நெட்டச்சில் ஒருநிலைப் புள்ளிவழி P′Q′ செல்லுமென நிறுவுக. இந் நிலைப்புள்ளி யாது எனக் காண்க.

21. நீள்வட்டத்தின் PP′ விட்டநுனி P இடத்துத் தொடுவரையும் ஏனைய நுனி P′வழிச்செல்லும் நாண் P′Qவும் R-ல்வெட்டினால் Q இடத்துத் தொடுவரை PR- ஐ சமமாகப் பிரிக்குமென நிறுவுக.

22. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தின் செங்கோணம் இடைப்பட்ட இரு அரை விட்டங்கள் CP, CQ எனின் $\frac{1}{CP^2}+\frac{1}{CQ^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ என நிறுவுக.

23. செங்கோணத்தில் வெட்டும் இருவிட்டங்களின் நுனிகளை இணைக்கும் நாண்கள், நீள்வட்ட மையத்திலிருந்து நிலைத்த தொலையில் இருக்குமென நிறுவுக.

24. நீள்வட்டத்தின் உயிர்ப்புள்ளி S-ஐயும், நீள்வட்டத்தின் P புள்ளியையும் இணைக்க வருங் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் உதவி வட்டத்தினைத் தொடுமென நிறுவுக.

25. நீள்வட்டத்தில் வரைந்த ஒரு நாற்சிறையின் முப் பக்கங்கள் குறித்த மூக்கோடுகளுக்கு ஒருபோகாக இருப்பின், நான்காவது பக்கமும் ஒரு நிலைத்த கோட்டுக்கு ஒருபோகாக இருக்குமென நிறுவுக.

26. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் P இடத்துத் தொடு வரை நெட்டச்சு நுனிகள் A, A'இடத்துத் தொடுவரைகளை நிரலே L, M புள்ளிகளில் வெட்டினால் AL. A'M $= b^2$ என நிறுவுக.

27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத் தொடுவரை ஒன்றுக்குக் குற்றச்சில் மையத்திலிருந்து $\sqrt{a^2 - b^2}$ தொலையில் இருக்கும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் தன் பெருக்கத்தின் கூட்டுத் தொகை $2a^2$ என நிறுவுக.

28. நீள்வட்டத் தொடுவரை ஒன்றுக்கு உயிர்ப்புள்ளிகள் நீள் வட்ட மையம், நீள்வட்ட முனைகள் இவற்றிலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் நிரலே s, s', c, a, a' எனின் $ss' - c^2 = e^2 (aa' - c^2)$ என நிறுவுக.

29. நீள்வட்டத்தின் P_1, P_2 புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் செங்கோணத்தில் Q-ல் வெட்டுகின்றன. அத் தொடுவரைகளுக்கு நீள்வட்ட மையத்திலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் p_1, p_2 எனின்,

$p_1 . QP_1 = p_2 . QP_2$ என நிறுவுக.

30. நீள்வட்டம் ஒன்றின் நேர்குத்தான இரு தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியிலிருந்தும், நீள்வட்ட மையத்திலிருந்தும் தொடுநாணுக்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோடுகளின் பெருக்கத்தொகை மாறு ராசியாகும் என நிறுவுக.

31. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் 'θ' இடத்துத் தொடு வரை உதவி வட்டத்தை மையத்தில் செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டின் $\frac{1}{e^2} = 1 + \sin^2\theta$ என நிறுவுக.

32. நீள்வட்டம், அதன் உதவி வட்டம் இவற்றின் P, P' புள்ளிகள் ஒத்தனவாயின் P, P' இடத்துத் தொடுவரை நெட்டச்சில் வெட்டும் என நிறுவுக.

33. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ அதிபரவளையத்திலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகள் ஆயத்தோடு நிரப்புங்கோணங்களைப் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

34. நீள்வட்டத்தின் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ இடத்துத் தொடு வரைகள், செங்கோடுகள் நிரலே (h,k), (ξ,η) புள்ளிகளிடத்து வெட்டின் $a^2\xi = e_2 \, hx_1x_2$, $b^4\eta = -a^2 \, e^2 k \, y_1y_2$ என நிறுவுக. e நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைத்தகவு ஆகும்.

35. நேர்குத்தான இரு கோடுகளைத் தொடும்படி ஒரு நீள் வட்டம் நகருமாயின் அதன் மையத்து இயங்குவரை ஒரு வட்ட மென நிறுவுக.

36 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் R (மையக் கோணம் θ) புள்ளியை S,S' உயிர்ப்புள்ளிகளோடு இணைக்கவரும் RS, RS' கோடுகள் மீண்டும் நீள்வட்டத்தை P,Q புள்ளிகளில் வெட்டின், P,Q புள்ளி களிடத்துத் தொடுவரைகள்

$$\left\{ -a\cos\theta, -\frac{b(1+e^2)}{1-e^2}\sin\theta \right\}$$ -ல் வெட்டுமெனவும்,

R இடத்துச் செங்கோடு இப்புள்ளிவழிச் செல்லுமெனவும் நிறுவுக.

R நீள்வட்ட வரையில் இயங்குமாயின் இப் புள்ளியின் இயங்குவரை $(1+e^2)^2 \frac{x^2}{a^2} + (1-e^2)^2 \frac{y^2}{b^2} = (1+e^2)^2$ எனவும்

PQ-ன் சமன்பாடு $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right)\sin\theta + 1 = 0$

எனவும் நிறுவுக.

37. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் நேரகல நுனியிடத்துச் செங்கோடு நெட்டச்சினை G-ல் வெட்டின் $CG = ae^3$ என நிறுவுக. இங்கு C நீள்வட்டத்தின் மையமாகும்.

38. e மையத் தொலைத்தகவுடைய நீள்வட்டத்தின் நேரகல நுனியிடத்துச் செங்கோடு குற்றச்சின் நுனிவழிச் சென்றால் $e^4 + e^2 = 1$ என நிறுவுக.

39. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் செங்கோடு ஒன்று ஆயங்களோடு சம கோணங்களைப் பிறப்பிப்பின், இக் கோடு ஆயங்கள் இவற்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{(a^2 - b^2)^2}{2(a^2 + b^2)}$ என நிறுவுக.

40. e யைத் தொலைத் தகவுடைய நீள்வட்டத்தின் θ, $\frac{\pi}{2} + \theta$ யைக் கோணங்களுடையப் புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் இடைப்பட்ட கோணம் w எனின்,

$2 \cot w = \frac{e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \sin 2\theta$ என நிறுவுக.

41. $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} = 1$ நீள்வட்டத்தின் 'α' இடத்துச் செங்கோடு அதனை '2α'-ல் வெட்டின், $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ என நிறுவுக.

42 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்து நெட்டச்சோடு $\frac{\pi}{4}$ கோணம் பிறப்பிக்கும் PCQ விட்டத்தின் நீளம் என்ன? P இடத்துச் செங்கோடு, CP இவற்றிடைப்பட்ட கோணத்தின் இருக்கை (Tangent) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ என நிறுவுக.

43. உயிர்ப்புள்ளி வழி நாண் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி, நெட்டச்சுக்கு ஒருபோகான கோடு நாணினைச் சமமாகப் பிரிக்குமென நிறுவுக.

44. நீள்வட்டம், அதன் உதவி வட்டம் இவற்றில் இருக்கும் ஒத்த இரு புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டமென நிறுவுக.

45. PNP′ நீள்வட்டத்தின் இரட்டைக் குத்தாயம், C மையம் P இடத்துச் செங்கோடு CP′-ஐ வெட்டும் புள்ளி R எனின் R-ன் இயங்குவரை ஒரு நீள்வட்டமென நிறுவுக.

46. நீள்வட்டத்தின் புள்ளிகளை அணைத்திடத்துச் செங்கோடுகள் உயிர்ப்புள்ளிகள் இடைவழியே செல்லுமென நிறுவுக.

47. P இடத்துச் செங்கோடு நெட்டச்சு குற்றச்சுகளை நிரலே G, g புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $a^2\ CG^2 + b^2\ Cg^2 = (a^2 - b^2)^2$ எனவும் உயிர்ப்புள்ளிகளிலிருந்து P-ன் தொலைகள் r, r_1 எனின் $\frac{PG^2}{rr_1} = \frac{b^2}{a^2}$ எனவும் நிறுவுக

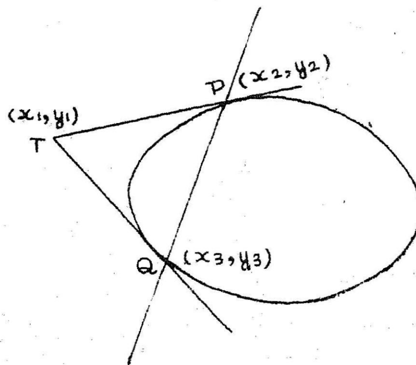
48. நீள்வட்டத்தின் P இடத்துச் செங்கோடு ஆயத்தினை G-ல் வெட்டின், PG-ன் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை ஒரு நீள்வட்டமென நிறுவுக.

49. நீள்வட்டத்தின் P இடத்துச் செங்கோடு நெட்டச்சினை G-ல் வெட்டுகிறது. செங்கோட்டில் PG = PQ என்றிருக்க Q புள்ளியை எடுத்தால், Q-வின் இயங்குவரை என்ன ?

50. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் மையம் C, P புள்ளிக்கு ஒத்த உதவி வட்டத்துப் புள்ளி p, Cp-ன் நீட்சி $x^2 + y^2 = 4(a + b)^2$ வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி Q எனின், PQ $\frac{x^2}{(2a+b)^2} + \frac{y^2}{(2b+a)^2} = \frac{4}{9}$ நீள்வட்டத்தின் செங்கோடென நிறுவுக.

28. T (x_1, y_1)-லிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-க்கு வரையும் தொடுவரைகளின் தொடு நாண் PQ-க்கு சமன்பாடு காண்க.

T, P, Q-ஐ நிரலே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனக் கொள்க.



படம் - 95

P இடத்துத் தொடுவரை $\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1$ ...(1)

Q இடத்துத் தொடுவரை $\frac{xx_3}{a^2} + \frac{yy_3}{b^2} = 1$ ...(2)

இவ்விரு தொடுவரைகளும் (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால்

$$\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} = 1 \quad ...(3)$$

$$\frac{x_1x_3}{a^2} + \frac{y_1y_3}{b^2} = 1 \quad ...(4)$$

(3), (4)-ஆல் $P(x_2, y_2)$, $Q(x_3, y_3)$ புள்ளிகள்

$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b} = 1$-ல் உளவெனக் காணலாம்

$\therefore$ PQ-ன் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

மாதிரி 17

உயிர்வட்டப் புள்ளியிலிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைத் தொடுநாண் ஒரு நீள்வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டினை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனக் கொண்டால் அதன் உயிர் வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ஆகும்.

இவ்வட்டத்துப் புள்ளி ஒன்றின் ஆயத்தொலைகளை $(\sqrt{a^2 + b^2}\cos\theta, \sqrt{a^2+b^2}\sin\theta)$ எனக் கொள்ளலாம். இப்புள்ளியிலிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைத் தொடுநாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x\sqrt{a^2 + b^2}\cos\theta}{a^2} + \frac{y\sqrt{a^2 + b^2}\sin\theta}{b^2} = 1$$

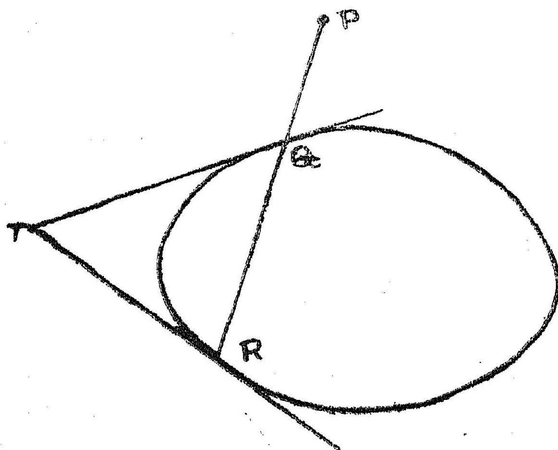
$$(\text{அ-து}) \quad \frac{\frac{x\cos\theta}{a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\frac{y\sin\theta}{b^2}}{\sqrt{b^2+b^2}} = 1$$

ஆகவே, இக்கோடு தொடும் நீள்வட்டம்

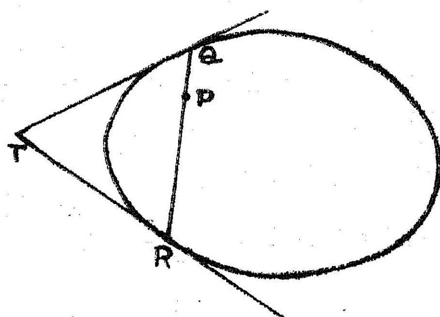
$$\left(\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{y^2}{b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2+b^2}$$

29 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு.



படம்- 96



படம் - 97

P வழிச் செல்லும் கோடு நீள்வட்டத்தினை Q, R-ல் வெட்டும் எனவும், Q, R இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி T (h, k) எனவும் கொள்ளுவோம். T-ன் இயங்குவரை P-ன் துணைக்கோடாகும்.

T-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் தொடுநாண் QR ஆகையால் QR-ன் சமன்பாடு

$$\frac{xh}{a^2}+\frac{yk}{b^2}=1$$

இக் கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால்

$$\frac{x_1h}{a^2}+\frac{y_1k}{b^2}=1$$

இக் கட்டுப்பாடு உண்மைப்பட (h, k) எப்போதும் $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ கோட்டில் இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகவே, (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை, (x_1, y_1)-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் தொடுநாண், (x_1, y_1)-ன் துணைக் கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகள் ஒன்றுபோல் இருப்பதைக் காணலாம். (x_1, y_1) நீள்வட்டத்தின் வெளியே இருப்பின் அதன் துணைக்கோடு தொடுநாண் என்பதும், (x_1, y_1) நீள்வட்டத்தில் இருப்பின் அதன் துணைக்கோடு (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை என்பதும் கருதற்பாலன.

கிளைத்தேற்றம்:—S உயிர்ப் புள்ளியின் துணைக்கோடு உயிர்க்கோடாகும்,

S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$

$$\therefore\ (ae, 0)\text{-ன் துணைக்கோடு } \frac{x\,ae}{a^2}=1$$

$$(\text{அ-து})\ x=\frac{a}{e}$$

இது S-ன் ஒத்த உயிர்க்கோடாகும்.

30. P-ன் துணைக்கோடு Q வழிச் சென்றால் Q-ன் துணைக் கோடும் P வழிச் செல்லும்.

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்றும், P, Q புள்ளிகள் (x_1, y_1) (x_2, y_2) என்றும் கொள்வோம்.

P-ன் துணைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

இக்கோடு (x_2, y_2) வழிச் செல்வதால்

$$\frac{x_2\, x_1}{a^2} + \frac{y_2\, y_1}{b^2} = 1$$

ஆகவே, (x_1, y_1) புள்ளி $\frac{x_2\, x}{a^2} + \frac{y_2\, y}{b^2} = 1$-ல் இருக்கும்; அஃதாவது P, Q-ன் துணைக் கோட்டில் இருக்கும்.

31. நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த, ஒரு கோட்டின் துணைப்புள்ளி. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐச் சார்ந்த $lx + my + n = 0$-ன் துணைப் புள்ளியைக் காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$lx + my + n = 0$-ன் துணைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

$\therefore\ lx + my + n = 0,\ \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$ இச்சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிக்கும்.

$$\therefore\ \frac{l}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{m}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{n}{-1}$$

$$\text{ஆகவே,}\quad x_1 = -\frac{a^2 l}{n},\quad y_1 = -\frac{b^2 m}{n}$$

$\therefore\ lx + my + n = 0$-ன் துணைப்புள்ளி $\left(-\frac{a^2 l}{n}, -\frac{b^2 m}{n}\right)$

32. (x_1, y_1) (x_2, y_2) புள்ளிகள் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐச் சார்ந்த துணை இய புள்ளிகளாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு.

(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு (x_2, y_2) வழிச் சென்றால் (x_1, y_1), (x_2, y_2) துணை இயப் புள்ளிகள் (Conjugate Points) எனக் கண்டோம்.

(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

இக் கோடு (x_2, y_2) வழிச் செல்வதால்

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1$$

32. $lx + my + n = 0$, $l_1 x + m_1 y + n_1 = 0$ கோடுகள் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐச் சார்ந்த துணை இய கோடுகளாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐச் சார்ந்த $lx + my + n = 0$-ன் துணைப்புள்ளி $\left(-\frac{a^2l}{n}, -\frac{b^2m}{n}\right)$

இப் புள்ளி $l_1x + m_1 y + n_1 = 0$-ல் இருந்தால்

$$l_1\left(-\frac{a^2l}{n}\right) + m_1\left(-\frac{b^2m}{n}\right) + n_1 = 0$$

(அ-து) $a^2ll_1 + b^2mm_1 = nn_1$

மாதிரி 18

உயிர்ப் புள்ளிவழிச் செல்லும் துணை இயக் கோடுகள் இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணம் என நிறுவுக. உயிர்ப் புள்ளி வழிச் செல்லும் துணை இயக் கோடுகள் $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1 y + n_1 = 0$ எனக் கொள்க. இவை துணை இயக் கோடுகள் ஆகையால்

$$a^2ll_1 + b^2mm_1 = nn_1 \quad \ldots (1)$$

$lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ உயிர்ப்புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$lae + n = 0$, $l_1 ae + n_1 = 0$

$\therefore \quad nn_1 = ll_1 a^2e^2$

இம்மதிப்பை (1)-ல் ஈடாக்கின்

$a^2ll_1 + b^2mm_1 = ll_1 a^2e^2$

(அ-து) $ll_1 a^2 (1 - e^2) + b^2 mm_1 = 0$

(அ-து) $ll_1 b^2 + b^2 mm_1 = 0$

$$(அ-து) \left(-\frac{l}{m}\right)\left(-\frac{l_1}{m_1}\right) = -1$$

$\therefore$ $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகளிடைப் பட்ட கோணம் செங்கோணமாகும்.

மாதிரி 19

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் செங்கோடுகளின் துணை புள்ளிகள் இயங்குவரை

$$\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 - b^2)^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் 'θ' இடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = (a^2 - b^2) \quad \dots (1)$$

இதன் துணைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொண்டால் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots (2)$

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{a}{\cos\theta}} = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{-b}{\sin\theta}} = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$(அ-து) \quad \frac{x_1\cos\theta}{a^3} = \frac{y_1\sin\theta}{-b^3} = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a^3}{x_1}\cdot\frac{1}{a^2 - b^2}, \quad \sin\theta = -\frac{b^3}{y_1}\cdot\frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a^3}{x_1}\cdot\frac{1}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(-\frac{b^3}{y_1}\cdot\frac{1}{a^2 - b^2}\right)^2 = 1$$

$$(அ-து) \quad \frac{a^6}{x_1^2} + \frac{b^6}{y_1^2} = (a^2 - b^2)^2$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 - b^2)^2$

மாதிரி 20

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தின் உதவி வட்டத் தொடுவரைகளின் நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப்புள்ளியின் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}$ என நிறுவுக.

உதவி வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$. உதவி வட்டத்துத் தொடுவரை ஒன்றின் நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைக்கோடு உதவி வட்டத்தைத் தொடும்.

(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$

இக் கோடு உதவி வட்டத்தைத் தொட்டால்

$$a^2\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}\right)^2+a^2=\left(+\frac{b^2}{y_1}\right)^2$$

(அ-து) $\frac{b^4 x_1{}^2}{a^2 y_1{}^2}+a^2=\frac{b^4}{y_1{}^2}$

(அ-து) $\frac{x_1{}^2}{a^4}+\frac{y_1{}^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}$

பயிற்சிகள் 18

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த துணை இயப் புள்ளிகளில் இரண்டு $(-6, 4)$, $\left(4, 5\frac{5}{8}\right)$ என நிறுவுக.

2. $lx + my = 1$ கோட்டின் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப்புள்ளி $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$-ல் இருப்பதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன ?

3. A இடத்துச் செங்கோட்டின் துணைப்புள்ளி B இடத்துச் செங்கோட்டில் இருப்பின், B இடத்துச் செங்கோட்டின் துணைப் புள்ளி A இடத்துச் செங்கோட்டில் இருக்குமென நிறுவுக.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் CQ விட்டம் P இடத்துச் செங்கோட்டோடு துணை இயக் கோடாக இருப்பின், CP-யும் Q இடத்துச் செங்கோடும் துணை இய கோடுகளாகும் என நிறுவுக.

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் இரு துணை இய கோடுகள் நெட்டச்சு துனிகள் வழிச் சென்றால், $\frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1$ வளைவரையில் வெட்டுமென நிறுவுக.

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டச் செங்கோடுகளின் $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப்புள்ளியின் இயங்கு வரை $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ என நிறுவுக.

7. குற்றச்சை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத் தொடுவரைகளின் நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப்புள்ளியின் இயங்கு வரையைக் காண்க.

8. $y^2 = 4px$ பரவளையத் தொடுவரைகளின் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை என்ன ?

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் தொடுவரைகளின் $x^2 + y^2 = ab$ வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப்புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன ?

10. P-ன் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைக்கோடு $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ நீள்வட்டத்தைத் தொட்டால், P-ன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}=\frac{1}{a^2b^2}$ என நிறுவுக.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தில் P, Q இரு புள்ளிகள். PS, QS' வனைவரையில் வெட்டினால், PQ-வின் துணைப் புள்ளி இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{(2a^2-b^2)^2}=1$ என நிறுவுக.

12. நீள்வட்டத்தின் P இடத்துச் செங்கோட்டின் துணைப் புள்ளி Q. C வழி CQ-க்கு நேர்குத்தாக வரையும் கோடு P இடத்துச் செங்கோட்டினை வெட்டும் புள்ளி R என்றால், R-ன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{b^6}+\frac{y^2}{a^6}=\frac{1}{a^2b^2}$ என நிறுவுக.

13. நீள்வட்டத்தின் நாண் ஒன்று ஒருநிலைப் புள்ளி வழிச் செல்கிறது. P, Q-ன் விட்ட எதிர்ப் புள்ளிகளை (Diametrically Opposite Points) நீள்வட்டத்தின் P', Q' புள்ளிகள் எனின், P'Q'-ன் துணைப் புள்ளி ஒரு நிலைக்கோட்டில் இருக்குமென நிறுவுக.

14. மையத்திலிருந்து குறித்த தொலை d க்கு அப்பால் இருக்கும் கோடுகளின் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப் புள்ளி இயங்குவரை என்ன ?

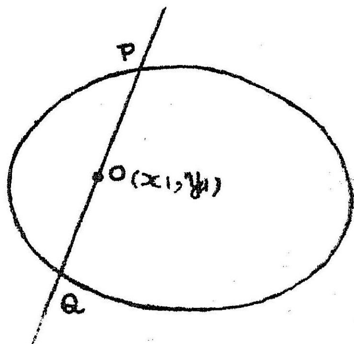
15. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்ட நாண்கள் மையத்தோடு 90° பிறப்பிப்பின், அவற்றின் துணைப் புள்ளிகள் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ என நிறுவுக.

16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தின் தொடுவரைகள் $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b$ நீள்வட்டத்தினை வெட்டும் இடத்துத் தொடுவரைகள் செங்கோணத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

17. P புள்ளியின் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ நீள் வட்டங்களைச் சார்ந்த துணைக் கோடுகள் Q-ல் வெட்டுகின்றன $lx + my + n = 0$ கோட்டில் P இருப்பின் Q-ன் இயங்குவரை $n\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)xy + mx + ly = 0$ என நிறுவுக.

34. குறித்த நடுப்புள்ளியைக்கொண்ட நாணின் சமன்பாடு.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



படம் - 98

நீள்வட்டத்து நாண் ஒன்றின் நடுப் புள்ளி $O(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) வழிச் செல்லும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

இங்கு இந் நாண் x-ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் θ, (x,y), (x_1, y_1)புள்ளிகளிடைப்பட்ட தொலை r. இக் கோட்டில் OP = எனின், P-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$$

இப்புள்ளி நீள்வட்டத்தில் இருந்தால்

$$\frac{(x_1 + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$

$$(\text{அ-து})\quad \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)r^2 + 2\left(\frac{x_1\cos\theta}{a^2} + \frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right)r$$

$$+\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$$

(x_1, y_1) PQ-வின் நடுப் புள்ளியாதலால் இச் சமன்பாட்டால் வரும் r-ன் மதிப்புகள் அளவொற்றுமையும் குறி வேற்றுமையும் உடையனவாக இருக்கும்.

$$\therefore\quad \frac{x_1\cos\theta}{a^2} + \frac{y_1\sin\theta}{b^2} = 0.$$

(அ-து) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

நாணின் சமன்பாடு $\frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta}$.

(அ-து) $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

(அ-து) $\frac{x - x_1}{y - x_1} = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}$.

(அ-து) $b^2 x_1 (x - x_1) + a^2 y_1 (y - y_1) = 0$.

(அ-து) $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$.

(அ-து) $T = S_1$.

மாதிரி 21.

$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ நீள்வட்டத்தைத் தொடும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்ட நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் இயங்குவரை

$$A^2 \frac{x^2}{a^4} + B^2 \frac{y^2}{b^4} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2$$ என நிறுவுக.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் நாண் ஒன்றின் நடுப் புள்ளி (x_1, y_1) என்க.

$\therefore$ நாணின் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$ ... (1)

$lx + my + n = 0$ கோடு, $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ நீள்வட்டத்தைத் தொட்டால் $A^2 l^2 + B^2 m^2 = n^2$.

$\therefore$ (1) கோடு $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$-ஐத் தொட்டால்,

$$A^2 \left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + B^2 \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை.

$$A^2 \frac{x^2}{a^4} + B^2 \frac{y^2}{b^4} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

மாதிரி 22

உயிர் வட்டத்திலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரை தொடுநாணின் நடுப்புள்ளி இயங்கு வரை $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}$ என நிறுவுக.

உயிர் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ இவ் வட்டத்திலிருக்கும் புள்ளியொன்றின் ஆயத்தொலைகள் (h, k) எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad h^2 + k^2 = a^2 + b^2. \qquad \ldots (1)$$

(h, k)-லிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுவரைத் தொடுநாணின் சமன்பாடு

$$\frac{xh}{a^2} + \frac{yk}{b^2} = 1 \qquad \ldots (2)$$

இத் தொடுநாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொண்டால் தொடுநாண் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a_2} + \frac{y_1^2}{b^2} \qquad \ldots (3)$$

(2), (3) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டின் சமன்பாடுகளாகையால்

$$\frac{\frac{h}{a^2}}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\frac{k}{b^2}}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}$$

(அ-து) $h = \dfrac{x_1}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}, \quad k = \dfrac{y_1}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}$

இம் மதிப்புகளை (1)-ல் ஈடாக்கின்

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2} = a^2 + b^2.$$

(அ-து) $\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2 + b^2}$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}$

35. $y = mx$ விட்டத்துக்கு ஒருபோகான நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் இயங்குவரையைக் காணல்.

$y = mx$ விட்டத்துக்கு ஒருபோகான நாண் ஒன்றின் நடுப் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$$\therefore \text{ நாணின் சமன்பாடு } \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

இக் கோடு $y = mx$-க்கு ஒருபோகானதால்

$$m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$$(\text{அ·து}) \quad y_1 = -\frac{b^2}{a^2m} x_1$$

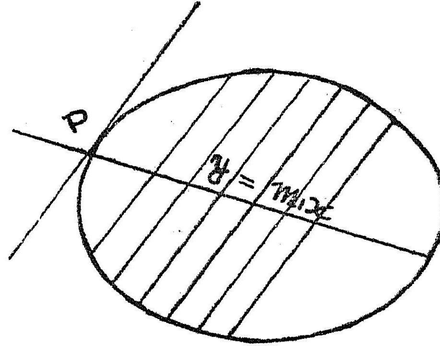
$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{m}$. இது நீள் வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். இவ் விட்டத்தின் சமன்பாட்டிலே $y = m_1x$ எனக் கொண்டால் $m_1 = -\frac{b^2}{a^2m}$

$$\therefore \quad mm_1 = -\frac{b^2}{a^2} \qquad \dots (1)$$

36. முற்பகுதி (1) சமன்பாட்டின் சமச்சீரால் $y = m_1x$-க்கு ஒரு போகான நாண்களே $y=mx$ விட்டம் சமமாகப் பிரிக்குமெனக் காணலாம். ஆகவே நீள்வட்ட விட்டமொன்றுக்கு ஒருபோகான நாண்களேப் பிறிதொரு விட்டம் சமமாகப் பிரித்தால், இவ் விட்டத்துக்கு ஒருபோகான நாண்களே முதல் விட்டம் சமமாகப் பிரிக்கும்.

இரு விட்டங்களுள் ஒன்று மற்றதற்கு ஒருபோகான நாண்களேச் சமாகப் பிரித்தால் இவை துணே இய விட்டங்கள் (Conjugate Diameters) எனப்படும் இத்தகைய விட்டங்கள் $y=mx$, $y = m_1x$ என்றால் $mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}$.

37. ஒரு விட்ட நுனியிடத்துத் தொடுவரை, அவ் விட்டம் சமமாகப் பிரிக்கும் நாண்களுக்கு ஒருபோகாகும்.



படம்-99

$y = mx + c$-க்கு ஒருபோகான நாண்களை $y = m_1 x$ விட்டம் சமமாகப் பிரித்தால் $mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}$ என்று நிறுவினோம்.

$y = m_1 x$ விட்டத்து நுனி P (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$$y_1 = m_1 x_1 \qquad \dots (1)$$

P இடத்துத் தொடுவரை $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

$\therefore$ P இடத்துத் தொடுவரையின் 'm' $= -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

$$= -\frac{b^2 x_1}{a^2 m_1 x_1} \quad \{(1) \text{ ஆல்}\}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2 m_1}$$

$$= m$$

$\therefore$ P இடத்துத் தொடுவரை $y = mx + c$-க்கு ஒருபோகாகும்.

துணைத்தேற்றம். CP, CD துணை இய இரு அரை விட்டங்களுள் ஒன்று மற்றொன்றின் நுனியிடத்துத் தொடுவரைக்கு ஒருபோகாக இருக்கும்.

38. ஒரு நாண் நுனிகளிடத்துத் தொடுவரை அந் நாணைச் சமமாகப் பிரிக்கும் விட்டத்தில் வெட்டும்.

அந்நாணின் சமன்பாடு $y = mx + c$ எனவும் அந் நாண் நுனிகளிடத்துத் தொடுவரைகளின் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்க.

ஆகவே, நாணின் சமன்பாடு (x_1, y_1)-ன் தொடுவரைத் தொடு நாணாகும்.

$$\therefore \text{ அதன் சமன்பாடு } \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$y = mx + c$, $\frac{yy_1}{b^2} = -\frac{xx_1}{a^2} + 1$ ஒரு கோட்டினைக் குறிப்பதால்

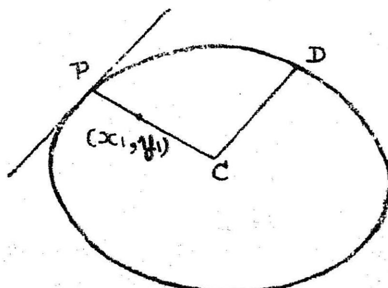
$$\frac{1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{m}{\frac{-x_1}{a^2}}$$

$$\therefore \frac{b^2}{y_1} = -\frac{a^2 m}{x_1}$$

$$(\text{அ-து})\ y_1 = -\frac{b^2}{a^2 m} x_1$$

$\therefore (x_1\ y_1)$, $y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$ கோட்டில் இருக்கும். இக் கோடு $y = mx + c$-க்கு ஒருபோகான நாண்களைச் சமமாகப் பிரிக்கும் விட்டமாகும்.

39. நீள்வட்ட விட்டத்துப் புள்ளியின் துணைக்கோடு துணை இய விட்டத்துக்கு ஒருபோகாக இருக்கும்.



படம்-100

CP-ல் இருக்கும் புள்ளி ஒன்றின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொண்டால் CP-ன் சமன்பாடு $y = \frac{y_1}{x_1} . x$.

$$(x_1, y_1)\text{-ன் துணைக்கோடு } \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$\therefore$ இக் கோட்டின் 'm' $= -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

CD-ன் சமன்பாடு $y = m_1x$ எனக் கொண்டால்

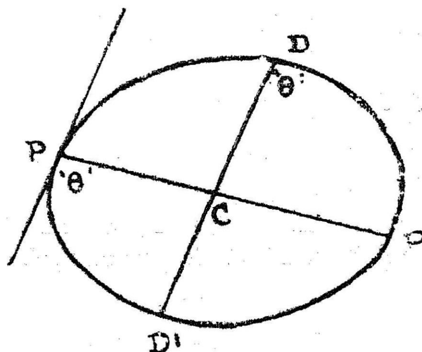
$$m_1\,\frac{y_1}{x_1} = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore\; m_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$\therefore$ CDயும் (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடும் ஒருபோகானவை.

40. துணை இய இரு அரைவிட்ட நுனிகளின் மைய கோணங்கள் θ, ϕ எனின், θ, ϕ கோணங்களின் வேற்றுமை ஒரு செங்கோணமாகும்.

துணை இய விட்டங்கள் PCP', DCD' எனவும் P, D புள்ளிகளின் மைய கோணங்கள் நிரலே θ, ϕ எனவும் கொள்க.



படம் - 101

P-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, D-ன் ஆயத் தொலைகள் $(a\cos\phi, b\sin\phi)$. CP, CD துணை இய விட்டங் களாக இருப்பின், P இடத்துத் தொடுவரை CD-க்கு ஒரு போகாக இருக்கும்.

$\therefore$ P இடத்துத் தொடுவரை $\dfrac{x\cos\theta}{a} + \dfrac{y\sin\theta}{b} = 1$

$\therefore$ CD-ன் சமன்பாடு $\dfrac{x\cos\theta}{a} + \dfrac{y\sin\theta}{b} = 0.$

இக் கோட்டில் D இருப்பதால்

$$\frac{a \cos \phi \cdot \cos \theta}{a} + \frac{b \sin \theta \sin \phi}{b} = 0$$

(அது) $\cos \theta \cdot \cos \phi + \sin \theta \sin \phi = 0$

$$\cos (\theta \sim \phi) = 0$$

$$\theta \sim \phi = \frac{\pi}{2}.$$

ஆகவே, P-ன் மைய கோணம் தெரிந்தால் D-ன் மைய கோணத்தினைக் காணலாம். P-ன் மைய கோணம் θ என்றால் D-ன் மைய கோணம் $\theta \pm \frac{\pi}{2}$.

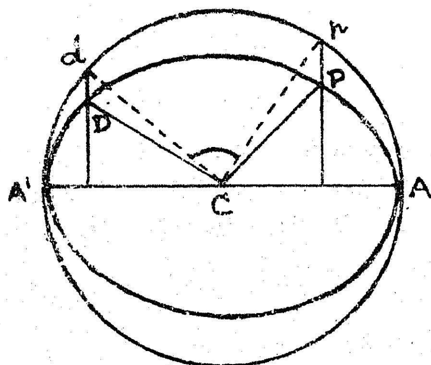
∴ P, D துணை இய இருவிட்ட நுனிகளின் மைய கோணங்கள் θ, $\theta + \frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்ளலாம்.

41. சில வடிவ கணிதப் பண்புகள்.

நீள்வட்டத்தில் PCP′, DCD′ துணை இய விட்டங்கள் எனக் கொள்க. ஆகவே, P, D புள்ளிகளின் மைய கோணங்கள் θ, $\theta + \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

∴ P, D-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a \cos \theta, b \sin \theta,)$ $(-a \sin \theta, b \cos \theta)$

(1) P, D புள்ளிகளின் ஒத்த உதவி வட்டத்துப் புள்ளிகள் p, d எனின் $p\,c\,d$ கோணம் செங்கோணமாகும்.



படம்-102

P-ன் மைய கோணம் θ எனின் $\theta = \hat{A}cp$

D-ன் மைய கோணம் φ எனின் $\varphi = A\hat{c}d$

$\varphi - \theta = A\hat{c}d - A\hat{c}p = p\hat{c}d$

CP, CD துணை இய விட்டங்களாகையால் $\varphi - \theta = 90°$

$$\therefore\ p\,c\,\hat{d} = 90°$$

(2) $CP^2 + CD^2 = a^2 + b^2$

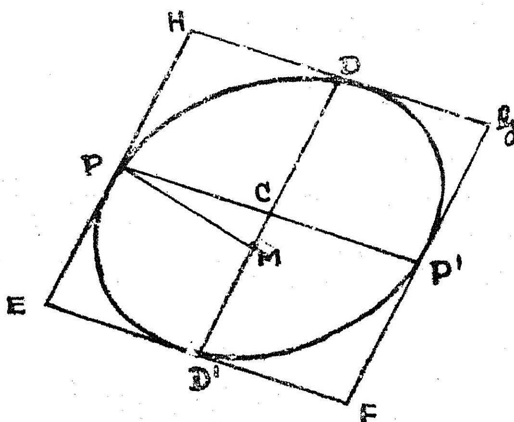
$$CP^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$$

$$CD^2 = a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta$$

$$\therefore CP^2 + CD^2 = a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$= a^2 + b^2.$$

(3) P இடத்துச் செங்கோடு CD-ஐ M-ல் வெட்டின் PM. CD $= ab$.



படம்—103

P இடத்துத் தொடுவரை $\dfrac{x\cos\theta}{a} + \dfrac{y\sin\theta}{b} = 1$

P இடத்துத் தொடுவரை CD க்கு ஒரு போகாகையால் PM = C-லிருந்து P இடத்துத் தொடுவரைக்கு வரையும்

நேர்குத்துக்கோடு

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{ab}{CD}$$

$\therefore$ PM. CD $= ab$.

(4) P, P′, D, D′ இடத்துத் தொடுவரைகளால் அமைந்த ஒருபோகு நாற்சிறையின் பரப்பு $4ab$ ஆகும்.

ஒருபோகு நாற்சிறை E F G H = 4 ஒருபோகு நாற்சிறை CDHP
= 4 . CD . PM.
= 4 ab.
= நெட்டச்சு, குற்றச்சால் அமைந்த நீள்சதுரப் பரப்பு.

(5) நீள்வட்டத்தின் உயிர்ப் புள்ளிகள் S, S′ எனின் SP . S′P = CD^2.

$$SP = a - ae\cos\theta.$$

$$S'P = a + ae\cos\theta.$$

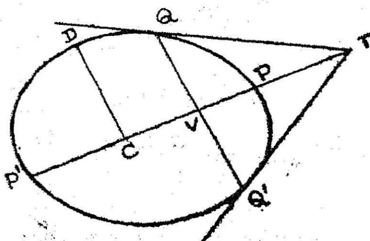
$$\therefore SP\,.\,S'P = a^2(1 - e^2\cos^2\theta)$$

$$= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - (a^2 - b^2)\cos^2\theta$$

$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$= CD^2$$

(6) P′CP விட்டம் சமமாகப் பிரிக்கும் QQ′ நாணின் துனிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் T-ல் வெட்டினால் (a) CV. CT $= CP^2$ (b) $\frac{QV^2}{PV\,.\,VP'} = \frac{CD^2}{CP^2}$. இங்கு QQ′-ன் நடுப் புள்ளி V.



படம்-104

Q,Q′ நுனிகளின் மைய கோணங்கள் $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ எனின் T-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\alpha\sec\beta, b\sin\alpha\sec\beta)$

$$\therefore CT^2 = (a\cos\alpha\sec\beta)^2 + (b\sin\alpha\sec\beta)^2$$
$$= (a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)\sec^2\beta.$$

T புள்ளி QQ′-ஐச் சமமாகப் பிரிக்கும் விட்டத்தில் இருக்கும்

P புள்ளியின் மைய கோணம் α ஆகும்.

$$\therefore CP^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha.$$
$$\therefore CT^2 = CP^2\sec^2\beta.$$

எனவே, $CT = CP.\sec\beta$. ... (1)

V புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left[\frac{a\cos(\alpha-\beta)+a\cos(\alpha+\beta)}{2}, \frac{b\sin(\alpha-\beta)+b\sin(\alpha+\beta)}{2}\right]$$

(அ-து) $(a\cos\alpha\cos\beta, b\sin\alpha\cos\beta)$

$$\therefore CV^2 = a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta$$
$$= (a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)\cos^2\beta$$
$$= CP^2.\cos^2\beta.$$

$\therefore CV = CP.\cos\beta$ ... (2)

(1), (2) ஆல் $CT.CV. = CP^2$

Q-ன் ஆயத்தொலைகள் $\{a\cos(\alpha+\beta), b\sin(\alpha+\beta)\}$

$$QV^2 = a^2\{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta\}^2 + b^2\{\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos\beta\}^2.$$
$$= (a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)\sin^2\beta.$$
$$= CD^2\sin^2\beta.$$

$$PV.VP' = (P'C+CV)(CP-CV)$$
$$= (CP+CV)(CP-CV)$$
$$= CP^2 - CV^2$$
$$= CP^2 - CP^2\cos^2\beta$$
$$= CP^2\sin^2\beta$$

$$\therefore \frac{QV^2}{PV.VP'} = \frac{CD^2}{CP^2}$$

47. துணை இய சம விட்டங்கள் (Equi Conjugate Diameters
P, D துணை இய இரு விட்ட நுனிகள் எனின், அவற்றின் மைய கோணங்கள் θ, $\theta + \frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$CP^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$$

$$CD^2 = a^2 \cos^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + b^2 \sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta$$

$$\therefore CP^2 - CD^2 = (a^2 - b^2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= (a^2 - b^2) \cos 2\theta.$$

CP = CD எனின் $\theta = \frac{\pi}{4}$ அல்லது $\frac{3\pi}{4}$

CP-ன் சமன்பாடு $y = \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} x$

$$= \frac{b}{a} \tan \theta \, x$$

$$= \frac{b}{a} \tan \frac{\pi}{4} \, x$$

$$= \frac{b}{a} x$$

CD-ன் சமன்பாடு $y = \frac{b}{a} \tan \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) x$

$$= \frac{b}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) x$$

$$= -\frac{b}{a} x.$$

$\therefore$ துணை இய சம விட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ ஆகும்.

ஆகவே, நீள்வட்ட அச்சுகளின் நுனிகளிடத்துத் தொடு வரைகளால் அமைந்த நீள்சதுரத்தின் மூல வரைகளோடு துணை இய சம விட்டங்கள் ஒன்றியிருப்பதைக் காணலாம்.

43. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1) நீள்வட்டத்து $y=mx$, $y=m_1x$ விட்டங்களைத் துணை இய விட்டங்களாக்கும் கட்டுப்பாடு $mm_1=-\frac{b^2}{a^2}$ எனக் கண்டோம்.

அத்தகைய விட்டங்கள் PCP′, DCD′ எனக் கொள்க. PCP′-ன் சமன்பாடு $ay-\lambda bx=0$ (2) எனின், DCD′-ன் சமன்பாடு $\lambda ay+bx=0$ (3) எனக் காணலாம். (1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் P, P′-ன் ஆயத்தொலைகளும், (1), (3) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் D, D′-ன் ஆயத்தொலைகளும் கிடைக்கும். P, P′ புள்ளிகள் (x_1, y_1), $(-x_1, -y_1)$ எனின்

$$x_1^2=\frac{a^2}{1+\lambda^2},\quad y_1^2=\frac{\lambda^2b^2}{1+\lambda^2}.$$

$$CP^2=CP'^2=x_1^2+y_1^2=\frac{a^2+\lambda^2b^2}{1+\lambda^2}.$$

இவ்வாறே D, D′ புள்ளிகள் (x_2, y_2) $(-x_2, -y_2)$ எனின்

$$x_2^2=\frac{\lambda^2a^2}{1+\lambda^2},\ y_2^2=\frac{b^2}{1+\lambda^2}$$

$$CD^2=CD'^2=\frac{\lambda^2a^2+b^2}{1+\lambda^2}.$$

ஆகவே, $CP^2+CD^2=\frac{a+\lambda^2b^2}{1+\lambda^2}+\frac{\lambda^2a^2+b^2}{1+\lambda^2}$

$$=a^2+b^2.$$

CP = CD எனின் $a^2+\lambda^2b^2=\lambda^2a^2+b^2$

(அ-து) $(\lambda^2-1)(a^2-b^2)=0$

$$\therefore\ \lambda=\pm1$$

∴ துணை இய சமவிட்டங்களின் சமன்பாடு

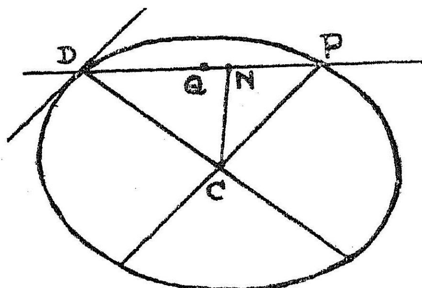
$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0.$$

மாதிரி 23.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=$-ன் 1 துணை இய இரு விட்ட நுனிகள் P, D எனின்.

(1) PD-ன் நடுப்புள்ளி,

(2) மையத்திலிருந்து P D-க்கு வரையும் நேர்குத்துக்குக் கோட்டு அடி.



படம்-105

(3) P, D இடத்துத் தொடுவரைகளின் வெட்டும் புள்ளி இவற்றின் இயங்குவரைகளைக் காண்க.

P, D புள்ளிகளின் மைய கோணங்கள் θ, $\frac{\pi}{2}+\theta$ எனக் கொண்டால், P, D புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் நிரலே $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$ ஆகும்.

(1) P D-ன் நடுப்புள்ளி Q-ஐ (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$$\therefore\ 2x_1 = a\cos\theta - a\sin\theta \qquad \ldots (1)$$

$$2y_1 = b\sin\theta + b\cos\theta \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து θ-ஐ அகற்றுக.

$$\left(\frac{2x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2y_1}{b}\right)^2 = (\cos\theta-\sin\theta)^2 + (\sin\theta+\cos\theta)^2 = 2$$

(அ-து) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ (x_1,\ y_1)$ இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$

(2) C-லிருந்து PD-க்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோட்டின் அடி N (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

CD, CP-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் N வழிச் செல்லும்.

CP-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்

$$x(x - a\cos\theta) + y(y - b\sin\theta) = 0.$$

(அ-து) $x^2 + y^2 = ax \cos\theta + by \sin\theta.$ ... (1)

CD-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்

$$x(x + a \sin\theta) + y(y - b\cos\theta) = 0$$

(அ-து) $x^2 + y^2 = -ax \sin\theta + by \cos\theta$ ... (2)

(x_1, y_1) (1), (2)-ல் இருப்பதால்

$$x_1^2 + y_1^2 = ax_1 \cos\theta + by_1 \sin\theta \quad \ldots (3)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = -ax_1 \sin\theta + by_1 \cos\theta \quad \ldots (4)$$

(3), (4)-லிருந்து θ-ஐ அகற்றுக.

(3), (4) சமன்பாடுகளின் தன் பெருக்கங்களைக் கூட்டினால்

$$2(x_1^2 + y_1^2)^2 = a^2x_1^2 + b^2y_1^2$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $2(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$

(3) P, D புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் (x_1, y_1)-ல் வெட்டினால் P D-ன் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

PD-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos(\theta + 45°) + \frac{y}{b}\sin(\theta + 45°) = \cos 45° \quad \ldots (2)$$

$\therefore$ (1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{\cos(\theta + 45°)}{a}} = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{\sin(\theta + 45°)}{b}} = \frac{1}{\cos 45°}$$

(அ-து) $x_1 = a\sqrt{2}\cos(\theta + 45°)$ ... (3)

$y_1 = b\sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$ ... (4)

(3), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து θ-ஐ அகற்றுக.

$$\left(\frac{x_1}{a\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

(அ-து) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 2$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$

மாதிரி 24.

PD, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$ நீள்வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

P D-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos(\theta+45^\circ)+\frac{y}{b}\sin(\theta+45^\circ)=\cos 45^\circ$$

(அ-து) $$\frac{x\cos(\theta+45^\circ)}{\frac{a}{\sqrt{2}}}+\frac{y\sin(\theta+45^\circ)}{\frac{b}{\sqrt{2}}}=1$$

$\theta+45^\circ=\alpha$ எனின், இச்சமன்பாடு

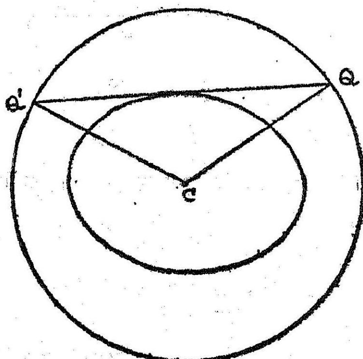
$\frac{x\cos\alpha}{\frac{a}{\sqrt{2}}}+\frac{y\sin\alpha}{\frac{b}{\sqrt{2}}}=1$ என்று வரும்.

இது $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$ நீள்வட்டத்தைத் தொடும்.

இந் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1$ ஆகும்.

மாதிரி 25.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்துத் தொடுவரை ஒன்று உயிர் வட்டத்தை Q, Q′-ல் வெட்டின் CQ, CQ′ நீள்வட்டத்தின் துணை இய விட்டங்களாகும் என நிறுவுக.



படம்-106

QQ'-ன் சமன்பாடு $y = mx + \sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$ எனக் கொள்வோம். CQ, CQ' கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)\left(\frac{y - mx}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}\right)^2$$

(அ-து) $(x^2 + y^2)(a^2m^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(y - mx)^2$

(அ-து) $x^2(m^2b^2 - b^2) - 2mxy(a^2 + b^2) + y^2(a^2 - a^2m^2) = 0$

(அ-து) $y^2 - \dfrac{2mxy(a^2 + b^2)}{a^2(1 - m^2)} - \dfrac{b^2x^2}{a^2} = 0$ ... (1)

CQ, CQ', கோடுகளின் 'm' கள் m_1, m_2 எனின் (1) சமன்பட்டால் $m_1 m_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ என்று வரும்.

∴ CQ, CQ' துணை இய விட்டங்களாகும்.

பயிற்சிகள் 19

1. நீள்வட்டம் ஒன்றுக்கு $y = -x$, $3y = 2x$ கோடுகள் துணை இய விட்டங்களாயின், நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைத் தகவினைக் காண்க.

2. $3x^2 + 7y^2 = 21$ நீள்வட்டத்துத் துணை இய சமவட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

3. ஒரு நீள்வட்டத்தின் துணை இய சம விட்டங்களின் இடைப்பட்ட கோணம் 120° எனின் நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைத்தகவு என்ன ?

4. $16x^2 + 25y^2 = 100$-ன் $5y = 4x$ விட்டத்துக்குத் துணை இய விட்டத்து நுனிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

5. துணை இய இரு விட்ட நுனிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு $x \cos a + y \sin a = p$ எனின், $a^2\cos^2 a + b^2\sin^2 a = 2p^2$ என நிறுவுக.

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்துத் துணை இய இருவட்ட நுனிகள் P, Q எனின், $PQ^2 - (SP - SQ)^2 = 2b^2$ என நிறுவுக. இங்கு S நீள்வட்டத்து உயிர்ப் புள்ளிகளுள் ஒன்றாகும்

7. ஒரு நீள்வட்டத்தில் C மையம், CP, CD துணை இய இரு விட்டங்கள், PSQ ஓர் உயிர்ப்புள்ளி நாண். P-ன் மைய கோணம் θ எனின், $e(\cos\theta + \sin\theta) = 1$ எனவும், PQ-வின் நீளம் அரை நெட்டச்சு எனவும் நிறுவுக.

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்துத் துணை இய விட்டங்கள் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் $\sin^{-1} \frac{2ab}{a^2 + b^2}$-ஐ விடக் குறைவாக இருக்காதென நிறுவுக.

9. நீள்வட்டத்துத் துணை இய இரு விட்டங்களின் இடைப்பட்ட கோணம் w எனின் $\frac{1}{CP^2} + \frac{1}{CD^2}$, $\sin^2 w$-க்குத் தக வேறுபடும் என நிறுவுக.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் θ, $\frac{\pi}{2} - \theta$ மைய கோணங்களுடைய புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் துணை இய சம விட்டங்களில் வெட்டுமென நிறுவுக.

11. நீள் வட்டத் துணை இய சம விட்டங்களில் ஒன்றின் புள்ளியிலிருந்து நீள்வட்டத்துக்குத் தொடுவரைகள் வரையின், தொடுகுத்துகளின் மைய கோணங்கள் கூடிய தொகை $\frac{\pi}{2}$-ன் ஒற்றை மடங்காகும் என நிறுவுக.

12. P புள்ளியிலிருந்து நீள்வட்டத்துணை இய சம விட்டங்களுக்கு PM, PN நேர்குத்துக் கோடுகளை வரையின் P-லிருந்து அதன் துணைக் கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு MN-ஐச் சமமாகப் பிரிக்குமென நிறுவுக.

13. நெட்டச்சு நுனியிடத்துத் தொடுவரையைத் துணை இய இரு விட்டங்கள் P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால், உயிர்ப் புள்ளிகளிடத்து PQ பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் நிமிர்க்கும் கோணங்கள் (Supplementary Angles) ஆகும் என நிறுவுக.

14. நீள்வட்ட நெட்டச்சுத் துணை இய இரு விட்ட நுனிகளிடத்து α, β கோணங்களைப் பிறப்பித்தால் $\cot^2\alpha + \cot^2\beta$ நிலைத்த மதிப்புடையது என நிறுவுக.

15. நீள்வட்ட உயிர்ப் புள்ளிகள் இடைப்பட்ட தொலை துணை இய இரு விட்ட நுனிகளிடத்து 2θ, $2\theta_1$ கோணங்களைப் பிறப்பித்தால் $\tan^2\theta + \tan^2\theta_1$ மாறு ராசியென நிறுவுக.

16. துணைஇய இருவிட்டங்கள் நீள்வட்டப்புள்ளி ஒன்றிடத்து λ, λ_1 கோணங்களைப் பிறப்பிப்பின் $\cot^2\lambda + \cot^2\lambda_1$ மாறு ராசி யென நிறுவுக.

17. துணை இய ஈரரை விட்டங்களின் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகளின் தொடுகுத்துக்கும் நெட்டச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பகுதிகள் தன் பெருக்கத்தின் கூட்டுத் தொகை $a^2(1-e^2)(2-e^2)$ என நிறுவுக.

18. நீள்வட்டத்தின் P, Q இடத்துச் செங்கோடுகள் PQவைச் சமமாகப் பிரிக்கும் விட்டத்தில் வெட்டின், இவற்றிடைப்பட்ட கோணம் 90° என நிறுவுக.

19. நீள்வட்டத்தின் ஒரு போகு இரு தொடுவரைகளை மற்றொரு தொடுவரை வெட்டும் புள்ளிகள், துணை இய விட்டங்களிலிருக்கும் என நிறுவுக.

20. நீள்வட்டத்தின் துணை இய இரு விட்டங்கள் உயிர்க்கோடு இவற்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் உயிர்ப் புள்ளியென நிறுவுக.

21. ஒரு நீள்வட்டத்தின் துணை இய விட்டங்கள் PCP′, DCD′ ; P-ன் மைய கோணம் ϕ, PP′D வட்டம் நீள்வட்டத்தை மீண்டும் வெட்டும் புள்ளி Q எனின், Q-ன் மைய கோணம் $\frac{\pi}{2} - 3\phi$ என நிறுவுக.

22. நீள்வட்டத்து உயிர்ப்புள்ளி S-லிருந்து P இடத்துத் தொடு வரைக்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோட்டின் நீளம் q, $SP = r$, P இடத்துத் தொடுவரைக்கு ஒரு போகான அரைவிட்டத்தின் நீளம் d எனின் $qd = br$ என நிறுவுக.

23. துணை இய இரு விட்ட நுனிகளிலிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்கத் தொகை நீள்வட்ட மையத்திலிருந்து அத் தொடுவரைக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் இருபடியாகும் என நிறுவுக.

24. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-ன் P இடத்துச் செங்கோடு CP-ன் துணை இய விட்டமான CD-ஐ Q-ல் வெட்டின் Q-ன் இயங்குவரை $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{x^2+y^2}\right)^2$ என நிறுவுக.

25. CP, CD நீள்வட்டத்துத் துணை இய விட்டங்களின் நுனிகள் P, D இடத்துச் செங்கோடுகள் R-ல் வெட்டின் PD-க்கு நேர்குத்தாக RC இருக்குமென நிறுவுக. R-ன் இயங்குவரை என்ன ?

26. நீள்வட்ட உயிர்ப்புள்ளிகளிலிருந்து துணை இய இரு விட்டங்களுக்கு வரையும் நேர்குத்துக்கள் Q ல் வெட்டின் Q-ன் இயங்குவரை ஒரு மையமுடைய நீள்வட்டமாகும் என நிறுவுக.

27. நிலைத்த புள்ளி Q (x_0, y_0) வழி CP-க்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோடு CD-ஐ L-ல் வெட்டின், L-ன் இயங்குவரை $(a^2-b^2)\,xy-a^2\,x_0y+b^2\,y_0x=0$ என நிறுவுக.
இங்கு நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, CP, CD நீள்வட்டத்தின் துணை இய விட்டங்களாகும்.

28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்துத் துணை இய இரு விட்டங்கள் $lx+my=1$ என்ற ஒரு நிலைத்த கோட்டினை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. P, Q இடத்து விட்டங்களுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகள் R-ல் வெட்டின், R-ன் இயங்கு வரை $a^5lx+b^2my=a^2+b^2$ என நிறுவுக.

29. துணை இய விட்டங்களுக்கு ஒருபோகாக இருநிலைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்று வழியாக வரையும் இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நீள்வட்டமென நிறுவுக.

30. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=25$ நீள்வட்டத்து $2x+3y+6=0$ நாணின் நடுப் புள்ளி யாது ?

31. $4x^2+5y^2=20$ நீள்வட்டத்து $x+2y=1$ நாணின் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{5}{21}, \frac{8}{21}\right)$ என நிறுவுக.

32. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ நீள்வட்ட நாண்கள் (1, 0) வழிச் சென்றால் அவற்றின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரையினைக் காண்க.

33. (h, k) வழிச் செல்லும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்ட நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{xh}{a^2} + \frac{yk}{b^2}$ என நிறுவுக.

34. மையத்து 90° பிறப்பிக்கும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்து நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரையினைக் காண்க.

35. $x^2 + y^2 = c^2$ வட்டத்தைத் தொடும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்து நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2$ என நிறுவுக.

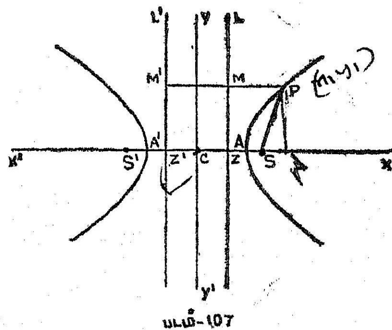
36. l நீளமுடைய $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்து நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரையினைக் காண்க.

8. அதிபரவளையம்

(Hyperbola)

1. ஒரு கூம்புவெட்டின் மையத் தொலைத் தகவு $e > 1$ எனின், அதனை அதிபரவளையமென வரையறுத்தோம்.

2. அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு : அதிபரவளையத்தின் உயிர்ப்புள்ளி S எனவும், உயிர்க்கோடு ZL எனவும் கொள்வோம். உயிர்க்கோட்டுக்கு SZ-ஐ நேர்குத்தாக வரைக. SZ-ஐ $e > 1$ தகவுக்கேற்ப அகத்தும் புறத்தும் பிரிக்கும் A, A′ புள்ளிகளைக் காண்க.



படம்-107

$$\therefore \frac{SA}{AZ} = e, \quad \frac{SA'}{ZA'} = e$$

∴ A, A′ புள்ளிகள் அதிபரவளையத்தில் இருப்பன. $AA' = 2a$, AA′-ன் நடுப்புள்ளி C எனக் கொள்க.

$$SA = e.AZ$$

$$SA' = e.ZA'$$

$\therefore \quad SA + SA' = e(AZ + ZA')$

(அ-து) $SC - AC + SC + CA' = e.AA'$

(அ-து) $2SC = 2ae.$

$\therefore \quad SC = ae.$

$SA' - SA = e(ZA' - AZ)$

$= e[ZC + CA' - (CA - ZC)]$

$= 2e.ZC.$

$\therefore \quad 2a = e. \ 2ZC.$

$\therefore \quad ZC = \frac{a}{e}.$

C-ஐ ஆதியாகவும், CS-ஐ x ஆயமாகவும், C வழி CS-க்கு நேர்குத்தான கோடு CY-ஐ y ஆயமாகவும் கொள்க.

S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(ae, 0)$

அதிபரவளையத்தின் P புள்ளி (x_1, y_1) எனவும், P-லிருந்து உயிர்க்கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோடு PM எனவும் கொள்க.

அதிபரவளைய வரையறையினால் $\frac{SP}{PM} = e.$

$$\therefore \quad SP^2 = e^2 PM^2$$

(அ-து) $(x_1 - ae)^2 + y_1^2 = e^2 (x_1 - CZ)^2$

$$= e^2 \left(x_1 - \frac{a}{e} \right)^2$$

(அ-து) $x_1^2 - 2aex_1 + a^2 e^2 + y_1^2 = e^2 x_1^2 - 2aex_1 + a^2$

(அ-து) $x_1^2 (e^2 - 1) - y_1^2 = a^2 (e^2 - 1)$

(அ-து) $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{a^2 (e^2 - 1)} = 1$

$\therefore \quad (x_1, y_1)$-ன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 (e^2 - 1)} = 1$

$a^2 (e^2 - 1) = b^2$ எனக் கொண்டால் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்று வரும். $e > 1$ எனவே $a^2 (e^2 - 1)$, அதாவது b^2 மிகையாகும். இது அதிபரவளையத்தின் திட்டமான சமன்பாடாகும்.

3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளையம் வரைதல்.

இச் சமன்பாட்டில் $y = 0$ எனக் கொண்டால், $x = \pm a$

$\therefore$ அதிபரவளையம் $(a, 0)$ $(-a, 0)$ புள்ளிகள் அஃதாவது A, A' வழிச் செல்லும்.

A, A' புள்ளிகள் அதிபரவளையத்தின் முனைகள் (Vertices) எனப்படும்.

$x = 0$ எனின், $y = \pm ib$.

$\therefore$ அதிபரவளையம் y ஆயத்தை வெட்டாது.

இச் சமன்பாட்டை $y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ ... (1)

அல்லது $x = \pm a \sqrt{\frac{y^2}{b^2} + 1}$ ... (2)

என்று எழுதலாம்.

$x^2 < a^2$ அஃதாவது $x < a$ அல்லது $x > -a$ என்றிருப்பின் y-க்குக் கற்பனை மதிப்புகள் வருமாதலின் A-க்கு இடமும் A'-க்கு வலமும் வளைவரை வராது.

(1) சமன்பாடடில் $-a$, a-க்கு இடைப்பட்ட மதிப்பைத் தவிர ஏனை x-ன் மதிப்புக்கு நேர்நிலையாக y-க்குக் குறி வேறுபட்ட ஒரே எண் மதிப்பில் இரு மதிப்புகள் வரும். ஆகவே, வளைவரை x — ஆயத்தோடு சமச்சீருடையதாகும்.

(2) சமன்பாட்டில் y-ன் மதிப்புதோறும் x-க்குக் குறி வேறுபாடும் ஒரே எண் மதிப்பும் உடைய இரு மதிப்புகள் வரும். ஆகவே, வளைவரை y — ஆயத்தோடு சமச்சீருடையதாகும்.

அதிபரவளையம் x, y ஆயங்களோடு சமச்சீருடைத்தாதலின் (x, y) புள்ளி அதிபரவளையத்தில் இருந்தால் $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ புள்ளிகளும் அதிபரவளையத்தில் இருக்கும். பின்னும் (x, y), $(-x, -y)$ புள்ளிகளை இணைக்குங்கோடு ஆதிவழிச் செல்வதால் C வழிச் செல்லும் நாண்கள் அனைத்தையும் C சமமாகப் பிரிக்கும். C அதிபரவளையத்தின் மையம் (Centre) எனப்படும்.

x-ன் மதிப்பு எண்ணிலிக்குச் கூடிச் செல்லச்செல்ல y-ன் மதிப்பும் அன்னதாகும்.

x-க்குப் பன்மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர் நிலையான y-ன் மதிப்புகளைக் காணின், வளைவரைப் புள்ளிகள் பலவற்றின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும். இவற்றால் அறியலாகும் அதிபரவளையத்து உருவத்தினை முந்தின பகுதிப் படத்தில் காண்க. அதிபரவளையம் தம்முள் வெட்டிக் கொள்ளாத இரு பகுதியைக் கொண்டதாகும்.

y ஆயத்தில் $CB = CB' = b$ என்றிருக்க B, B' புள்ளிகளை எடுப்பின் B B' அதிபரவளையத்தின் துணையாயம் (Conjugate Axis), A A' குறுக்காயம் (Transverse Axis) எனப்படும்.

4. நேரகலம் (Latus Rectum)

உயிர்ப்புள்ளி வழிச் செல்லும் இரட்டைக்குத்தாயம் நேரகலம் எனப்படும். L L'-ஐ நேரகலமெனக் கொண்டால்

$$\begin{aligned} SL &= e.\, SZ \\ &= e\,(CS - CZ) \\ &= e\left(ae - \frac{a}{e}\right) \\ &= a\,(e^2 - 1) \\ &= \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \text{நேரகலம்} = \frac{2b^2}{a}.$$

5. இரண்டாவது உயிர்ப்புள்ளியும் உயிர்க்கோடும்: A'-ன் நீட்சியில் $CS' = ae$ என்றிருக்க S' புள்ளியும், CA'-ல் $CZ' = \frac{a}{e}$ என்றிருக்க Z' புள்ளியும் எடுத்து Z' வழி CZ'-க்கு நேர்குத்தாக Z'L'-யும் Z'L-க்கு நேர்குத்தாக P'M-யும் வரைக.

$\frac{S'P}{PM'} = e$ என்றிருக்க P இயங்குமெனக் கொள்வோம்.

P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனின்

$$M'P = \frac{a}{e} + x_1$$

S'-ன் ஆயத்தொலைகள் $(-ae, 0)$

$$S'P^2 = e^2\, PM'^2$$

(அ-து) $(x_1 + ae)^2 + y_1{}^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} + x_1\right)^2$

(அ-து) $\frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{y_1{}^2}{a^2 (e^2 - 1)} = 1$

(அ-து) $\frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{y_1{}^2}{b^2} = 1$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ஆகவே, P $\frac{SP}{PM} = e$ அல்லது $\frac{S'P}{PM'} = e$ என்ற நிலையில் இயங்குமாயின் அதன் இயங்குவரை ஒரே அதிபரவளையமான $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும்.

$\therefore$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்துக்கு S', Z'L' இரண்டாவது உயிர்ப் புள்ளியும் உயிர்க்கோடும் ஆகும். S $(ae, 0)$ உயிர்ப்புள்ளியின் ஒத்த உயிர்க்கோடு $x - \frac{a}{e} = 0$, S^1 $(-ae, 0)$ உயிர்ப் புள்ளியின் ஒத்த உயிர்க் கோடு $x + \frac{a}{e} = 0$ ஆகும்.

6. (x_1, y_1) புள்ளி அதிபரவளையத்தின் உள், வளைவரை, வெளியில் இருந்தால் $\frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{y_1{}^2}{b^2} - 1$-ன் மதிப்பு நிரலே மிகை, சுன்னம், குறை ஆகும். Q புள்ளி (x_1, y_1), Q வழி குத்தாயம் QN, QN அதிபரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளி P எனக் கொள்க. P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, PN) ஆகும்.

இப் புள்ளி அதிபரவளையத்தில் இருப்பதால்

$$\frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{PN^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad PN^2 = b^2 \left(\frac{x_1{}^2}{a^2} - 1\right)$$

Q அதிபரவளையத்து உள் இருப்பதால் $QN < PN$

$$\therefore \quad QN^2 < b^2 \left(\frac{x_1{}^2}{a^2} - 1\right)$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{y_1^2}{b^2} < \frac{x_1^2}{a^2} - 1.$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0$$

இம் மாதிரியே Q புள்ளி அதிபரவளையத்தின் வெளியே இருந்தால் $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0$. வளைவரையில் (x_1, y_1) இருந்தால் $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$.

தம்முள் நேர்குத்தான l, l' கோடுகளிலிருந்து P புள்ளியின் p_1, p_2 தொலைகள் $\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1$ தொடர்புடையனவாக இருந்தால் P-ன் இயங்குவரை ஒரு அதிபரவளையமாகும். அவ் வதிபரவளையத்தின் மையம் l, l' கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி எனவும், குறுக்காயத்தின் நீளம் $2a$ எனவும், துணையாயத்தின் நீளம் $2b$ எனவும், குறுக்காயம், துணையாயம் நிரலே, l, l' கோடுகளில் இருப்பன எனவும் காணலாம்.

மாதிரி 1

ஓர் அதிபரவளையத்தின் உயிர்ப் புள்ளி (1, 2), ஒத்த உயிர்க் கோடு $2x + y = 1$, மையத் தொலைத்தகவு $\sqrt{3}$ என்றால் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

அதிபரவளையத்துப் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

SP $= \sqrt{3}$ ($2x + y - 1 = 0$-லிருந்து P-ன் தொலை)

$$\therefore\ (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 3\left(\frac{2x_1 + y_1 - 1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$(\text{அ-து})\ 5(x_1 - 1)^2 + 5(y_1 - 2)^2 = 3(2x_1 + y_1 - 1)^2$$

$$(\text{அ-து})\ 5x_1^2 + 5y_1^2 - 10x_1 - 20y_1 + 5 + 20$$
$$= 3(4x_1^2 + y_1^2 + 1 + 4x_1y_1 - 4x_1 - 2y_1)$$

$$(\text{அ-து})\ 7x_1^2 + 12x_1y_1 - 2y_1^2 - 2x_1 + 14y_1 - 22 = 0$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை, அஃதாவது அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 14y - 22 = 0.$$

மாதிரி 2.

$9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$ அதிபரவளையத்தின் மையம், மையத் தொலைத்தகவு, உயிர்ப் புள்ளிகள், உயிர்கோடு களைக் காண்க.

இச் சமன்பாட்டினை $9(x^2 + 8x) - 16(y^2 + 2y) = 16$ என்று எழுதலாம்.

(அ-து) $9\{(x+4)^2 - 16\} - 16\{(y+1)^2 - 1\} = 16.$

(அ-து) $9(x+4)^2 - 16(y+1)^2 = 144.$

(அ-து) $\dfrac{(x+4)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

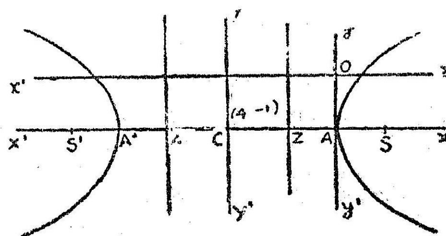
ஆதியை $(-4, -1)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{X^2}{16} - \dfrac{Y^2}{9} = 1$ என்று வரும்.

ஆகவே இச் சமன்பாடு $(-4, -1)$ புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட அதிபரவளையமாகும். அதிபரவளையத்தின் குறுக்காயம், துணையாயம் நிரலே $2a$, $2b$ என்றால்

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 9$$

$b^2 = a^2(e^2 - 1)$ எனவே $9 = 16(e^2 - 1)$

$$\therefore \quad e = \frac{5}{4}$$



படம் 108

முக்கிய குறிப்பு: படத்தில் $C(-4, -1$ என்பதற்குப் பதில் $(4, -1)$ என்றிருப்பதை திருத்திக் கொள்ளவும்.

$$CS = ae = \frac{4 \times 5}{4} = 5, \quad CZ = \frac{a}{e} = \frac{16}{5}$$

S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(1, -1)$

S'-ன் ஆயத் தொலைகள் $(-9, -1)$

S-ன் ஒத்த உயிர்கோடு $5x + 4 = 0.$

S'-ன் ஒத்த உயிர்க்கோடு $5x + 36 = 0$

எனக் காணலாம்.

8. அதிபரவளையத்துப் புள்ளியொன்று P என்றால் $S'P \sim SP = 2a$

$$S'P = e \cdot PM'$$
$$SP = e \cdot PM$$
$$\therefore \quad S'P - SP = e \cdot (PM' - PM)$$
$$= e.ZZ'$$
$$= e.\frac{2a}{e}$$
$$= 2a.$$

9. நீள் வட்டச் சமன்பாட்டில் b^2-க்குப் பதில் $-b^2$-ஐ ஈடாக்க அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு வருவதால், மூன் அதிகாரத்தில் நிறுவின பல முடிவுகளில் b^2-க்குப் பதில் $-b^2$-ஐ ஈடாக்க வரும் முடிவுகள் அதிபரவளையத்துக்குப் பொருந்துவ தாகும். அவையாவன :—

(1) (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

(2) (x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$

(3) $y = mx + c$ கோடு அப்பரவளையத்தைத் தொடுதற் குரிய கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2m^2 - b^2$.

(4) $y = mx \pm \sqrt{(a^2m^2 - b^2)}$ கோடு m-ன் அனைத்து மதிப் புக்கும் அதிபரவளையத்தைத் தொடும்.

தொடுகுத்தின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{-ma^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)$

(5) உயிர் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$

(6) (x_1, y_1)-லிருந்து அதிபரவளையத்துக்கு வரையும் தொடு வரைகளின் சமன்பாடு $SS_1 = T^2$.

(7) உதவி வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$

(8) அதிபரவளையத்தின் S, S' உயிர்ப் புள்ளிகளிலிருந்து தொடுவரை ஒன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகள் SY, S'Y' என்றால் $SY.S'Y' = -b^2$, Y, Y' புள்ளிகள் உதவி வட்டத்தில் இருக்கும்.

(9) (x_1, y_1)-ன் துணைக் கோடு $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

(10) $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகள் அதிபரவளையத்தைச் சார்ந்த துணை இய கோடுகளாகும் கட்டுப்பாடு $a^2ll_1 - b^2mm_1 = nn_1$.

(11) (x_1, y_1) புள்ளியை நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு $T = S_1$.

$$(\text{அ-து})\ \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

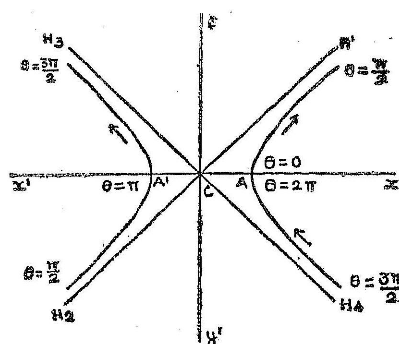
(12) $y = mx$, $y = m_1x$ துணை இய விட்டங்களாகும் கட்டுப்பாடு $mm_1 = \frac{b^2}{a^2}$.

10. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளையத்துப் புள்ளி ஒன்றின் இரு ஆயத்தொலைகளையும் ஒரே மாறு ராசியால் குறிப்பிடலாம்.

$x = a \sec \theta$-ஐ அதிபரவளையச் சமன்பாட்டில் ஈடாக்கினால் $y = b \tan \theta$.

எனவே, $(a \sec \theta,\ b \tan \theta)$ புள்ளி அதிபரவளையத்தது. θ-வுக்குப் பன்மதிப்புகள் கொடுத்தால், அதிபரவளையத்துப் புள்ளிகள் பல கிடைக்கும். $(a \sec \theta,\ b \tan \theta)$ புள்ளியை 'θ' எனக்குறிப்பிடல் மரபு.

$\theta = 0$ எனின், $x = a$, $y = 0$ (அ-து) வளைவரையில் A புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும். 0-லிருந்து $\frac{\pi}{2}$-க்கு θ தொடர்ந்து கூடுகையில் x, y-ன் மதிப்புகளும் எண்ணிலி மதிப்புகளுக்குக் கூடும். எனவே, 0-லிருந்து $\frac{\pi}{2}$-க்கு θ கூடுகையில் முதற் கால் வட்டத்து AH_1 அதிபரவளையப் பகுதி வரும். θ-வின் மதிப்பு $\frac{\pi}{2}$-க்கு மேல் கூடிச் செல்லுகையில் x, y-ன் மதிப்புகள் குறையாகவும், எண் அளவில் குறைந்துகொண்டும் வரும். $\theta = \pi$ என்றால் A′ புள்ளி கிடைக்கும். ஆகவே, இந் நிலையில் மூன்றாவது கால் வட்டத்து H_2 A′ பகுதி கிடைக்கும். இம்மாதிரியே π-லிருந்து $\frac{3\pi}{2}$-க்கு θ கூடும்பொழுது இரண்டாவது கால் வட்டத்து A′ H_3 பகுதியும், $\frac{3\pi}{2}$-லிருந்து 2π-க்கு θ கூடும்பொழுது நான்காவது கால் வட்டத்து H_4 A பகுதியும் வரும்.



படம்-109

11. 'θ' புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை, செங்கோடு.

(x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

∴ $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ இடத்துத் தொடுவரை

$$\frac{x \sec\theta}{a} - \frac{y \tan\theta}{b} = 1$$

(அ-து) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \sin\theta = \cos\theta$.

'θ' இடத்துச் செங்கோடு,

$ax \sin\theta + by = (a^2 + b^2) \tan\theta$ எனக் காணலாம்.

12. 'θ_1', 'θ_2' புள்ளிகளை இணைக்குங்கோடு

$$\frac{x - a\sec\theta_1}{a(\sec\theta_1 - \sec\theta_2)} = \frac{y - b\tan\theta_1}{b(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)}$$

(அ-து) $bx(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) - ay(\sec\theta_1 - \sec\theta_2)$

$= ab\sec\theta_1(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) - ab\tan\theta_1(\sec\theta_1 - \sec\theta_2)$

$= ab(\tan\theta_1 \sec\theta_2 - \sec\theta_1 \tan\theta_2)$.

(அ-து) $bx\left(\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\right) - ay\left(\frac{1}{\cos\theta_1} - \frac{1}{\cos\theta_2}\right)$

$$= ab\left(\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 \cos\theta_2} - \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_1 \cos\theta_2}\right)$$

(அ-து) $\frac{x}{a}(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)$

$- \frac{y}{b}(\cos\theta\frac{1}{2} - \cos\theta_1) = \sin\theta_1 - \sin\theta_2$

(அ-து) $\frac{x}{a}\sin(\theta_1-\theta_2)-\frac{y}{b}2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$

$$=2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

இருபுறத்தும் $2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$ -ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-\frac{y}{b}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

மாதிரி 3

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளையத்தைத் தொடும் $x^2+y^2=a^2$ வட்ட நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$ என நிறுவுக.

$x^2+y^2=a^2$ வட்ட நாண் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$\therefore$ வட்ட நாணின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$

(அ-து) $y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}$

இந்நாண் $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-ஐத் தொட்டால்

$$\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}\right)^2=a^2\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)^2-b^2$$

(அ-து) $(x_1^2+y_1^2)^2=a^2x_1^2-b^2y_1^2$

$\therefore (x_1, y_1)$-ன் இயங்குவரை $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$.

மாதிரி 4

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளையத்தின் செங்கோடு ஒன்று ஆயங்களை M, N புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆயங்களுக்கு M, N புள்ளிகள் வழி MP, NP கோடுகளை நேர்குத்தாக வரையின் P-ன் இயங்குவரை $a^2x^2-b^2y^2=(a^2+b^2)^2$ என நிறுவுக.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளையத்துப் புள்ளி ஒன்றின் ஆயத்தொலைகளை $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ எனக் கொண்டால், அப்புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$ax\sin\theta+by=(a^2+b^2)\tan\theta.$$

M இடத்து $y = 0$ $\therefore a.\,CM.\sin\theta = (a^2 + b^2)\tan\theta$

$$\therefore CM = \frac{a^2 + b^2}{a}\sec\theta.$$

N இடத்து $x = 0$ $\therefore$ $CN = \dfrac{a^2 + b^2}{b}\tan\theta.$

P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொண்டால்

$$x_1 = CM = \frac{a^2 + b^2}{a}\sec\theta \tag{1}$$

$$y_1 = CN = \frac{a^2 + b^2}{b}\tan\theta \tag{2}$$

(1), (2) லிருந்து θ-வை அகற்றுக.

$$(ax_1)^2 - (by_1)^2 = (a^2 + b^2)^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta)$$
$$= (a^2 + b^2)^2$$

$\therefore (x_1, y_1)$-ன் இயங்குவரை $a^2x^2 - b^2y^2 = (a^2 + b^2)^2$

மாதிரி 5

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் புள்ளிகளிலிருந்து $x^2 - y^2 = a^2$ அதிபரவளையத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் தொடு நாண் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ என நிறுவுக.

அத்தகைய தொடுநாண் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

இத் தொடு நாணின் சமன்பாடு

$$xx_1 - yy_1 = x_1^2 - y_1^2 \tag{1}$$

இதன் துணைப் புள்ளி $x^2 + y^2 = a^2$-ல் இருப்பதால் அதனை $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

$(a\cos\theta, a\sin\theta)$-ன் அதிபரவளையத்தைச் சார்ந்த துணைக் கோடு

$ax\cos\theta - ay\sin\theta = a^2$

(அ-து) $x\cos\theta - y\sin\theta = a.$

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{\cos\theta}{x_1} = \frac{\sin\theta}{y_1} = \frac{a}{x_1^2 - y_1^2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{ax_1}{x_1^2 - y_1^2}, \sin\theta = \frac{ay_1}{x_1^2 - y_1^2}$$

$$\therefore \left(\frac{ax_1}{x_1^2 - y_1^2}\right)^2 + \left(\frac{ay_1}{x_1^2 - y_1^2}\right)^2 = 1$$

(அ-து) $a^2(x_1^2 + y_1^2) = (x_1^2 - y_1^2)^2$.

$\therefore (x_1, y_1)$-ன் இயங்குவரை $a^2(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)^2$.

பயிற்சிகள் 20

1. ஒரு அதிபரவளையத்தின் உயிர்ப் புள்ளிகளுள் ஒன்று $(-1, -1)$, ஒத்த உயிர்க்கோடு $x - y + 1 = 0$, மையத் தொலைத் தகவு 2 என்றால், அதன் சமன்பாடு என்ன?

2. ஒரு அதிபரவளையத்தின் உயிர்க்கோடுகளுள் ஒன்று $3x - 4y = 2$, ஒத்த உயிர்ப் புள்ளி ஆதி, மையத் தொலைத் தகவு $1\frac{1}{4}$ எனின், அதன் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

3. $9x^2 - 16y^2 = 144$ அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு, நேரகலத்தின் நீளம், உயிர்ப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

4. $9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 1{,}404 = 0$ அதிபரவளையத்தின் மையம், மையத் தொலைத் தகவு, உயிர்ப் புள்ளிகளைக் காண்க.

5. $\frac{(3x - 4y - 12)^2}{100} - \frac{(4x + 3y - 12)^2}{225} = 1$ அதிபரவளையத்தின் மையம், உயிர்ப் புள்ளிகள் யாவை?

6. $y = 2x + k$ கோட்டுக்கு ஒருபோகான $3x^2 - 4y^2 = 15$-ன் தொடுவரைச் சமன்பாட்டினைக் காண்க. தொடுபுள்ளியின் ஆயத் தொலைகளையும் காண்க.

7. $5x^2 - 4y^2 = 44$ அதிபரவளையத்தை $3x - 4y = 12$ வெட்டும் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் $\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{3}\right)$ புள்ளியில் வெட்டுமென நிறுவுக.

8. $y^2 = 8x$ பரவளையம், $3x^2 - y^2 = 3$ அதிபரவளையம் இவற்றின் பொதுத் தொடுவரைகள் யாவை?

9. $x^2 - y^2 = a^2$ அதிபரவளேயத்தின் C மையத்திலிருந்து தொடுவரை ஒன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு, தொடு வரையை M-லும், வளைவரையை N-லும் வெட்டினுல் $CM. CN = a^2$ என நிறுவுக.

10. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் P இடத்துச் செங்கோடு துணையாயத்தை G-ல் வெட்டின் $\frac{SG^2}{SP. S'P}$ நிலையெண் என நிறுவுக. இங்கு S, S' அதிபரவளேயத்தின் உயிர்ப்புள்ளிகளாகும்.

11. $(1, 2)$, $(-2, -1)$, $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ புள்ளிகள், $2x^2 - 3y^2 = 2$ அதிபரவளேயத்தைச் சார்ந்த தம்முள் துணை இய புள்ளிகள் (Self Conjugate Points) என நிறுவுக.

12. $x^2 - y^2 = a^2$ அதிபரவளேயத் தொடுவரைகளின் $y^2 = 4ax$ பரவளேயத்தைச் சார்ந்த துணைப்புள்ளி இயங்கு வரை $4x^2 + y^2 = 4a^2$ நீள் வட்டமென நிறுவுக.

13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ அதிபரவளேயத்தின் செங்கோட்டு நாண் களின் துணைப் புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை $\frac{a^6}{x^2} - \frac{b^6}{y^2} = (a^2 + b^2)^2$ என நிறுவுக.

14. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் உயிர்ப் புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத் தொடுவரைகளின் அதிபரவளேயத்தைச் சார்ந்த துணைப் புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2}$ என நிறுவுக.

15. x ஆயத்தோடு 45° சாய்ந்திருக்கும் $2x^2 - 3y^2 = 1$ அதிபரவளேயத்தின் நாண்கள் தம் நடுப் புள்ளிகள் இயங்குவரை யாது ?

16. $(3, 2)$ புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட $16x^2 - 25y^2 = 400$ அதிபரவளேய நாணின் சமன்பாடு என்ன ?

17. (h, k) வழிச் செல்லும், $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைய நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $\left(\frac{h}{2}, \frac{k}{2}\right)$ புள்ளியை மையமாக கொண்ட மற்றொரு அதிபரவளையமென நிறுவுக.

18 ஒரு அதிபரவளையத்தின் உயிர்ப் புள்ளிவழி நாண்கள் தம் நடுப் புள்ளி இயங்குவரை மற்றொரு அதிபரவளையமென நிறுவுக.

19. $x^2 - y^2 = a^2$ அதிபரவளையத்துச் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப் புள்ளி இயங்குவரை $(y^2 - x^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ என நிறுவுக.

20. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளையத்தின் தொடுவரை ஒன்று $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = 1$ நீள்வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டின் PQ-ன் நடுப் புள்ளி இயங்குவரை

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^2 = \frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4}$$ என நிறுவுக.

21. $9x^2 - 4y^2 = 36$ அதிபரவளையத்தின் $y = 3x$ விட்டத்தின் துணை இய விட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

22. $16x^2 - 9y^2 = 144$ அதிபரவளைய $x = 2y$ விட்டத்தின் துணை இய விட்டத்தைக் காண்க.

23. அதிபரவளையத்தின் தொடுவரை ஒன்று உயிர் வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால் CP, CQ துணை இய இரு விட்டங்கள் என நிறுவுக.

13. எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் (Asymptotes).

$(a \sec\theta, b \tan\theta)$ இடத்துத் தொடுவரை

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\sin\theta = \cos\theta.$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$-ஐ இச் சமன்பாட்டில் ஈடாக்கின் தொடுவரைச் சமன்பாடு $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$

இவ்வரை C மையம் வழிச் செல்லும். அதிபரவளையத்தின் தொடுவரைத் தொடுகுத்து AH_1 அல்லது AH_2 பகுதி வழி எண்ணிலித் தொலைக்குச் செல்லுகையில், தொடுவரையின் எல்லை நிலை (Limiting Position) இக் கோடாகும். (10-ஆம் பகுதி படத்தைப் பார்க்க) இம் மாதிரியே $\theta = \frac{3\pi}{2}$ எனின் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

தொடுகுத்து $A'H_3$ அல்லது AH_4 பகுதி வழி எண்ணிலித் தொலைக்குச் செல்லுகையில் அத் தொடுவரையின் எல்லை நிலை இக் கோடாகும். இக் கோடும் ஆதி வழிச் செல்லும்.

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ கோடுகள் அஃதாவது ஒரே சமன்பாட்டில் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் (Asymptotes) எனப்படும். இவை அதிபரவளையத்தின் மையம் வழிச் செல்லும் தொடுவரைகளாகும் இத் தொடுவரைகளின் தொடுகுத்துகள் எண்ணிலித் தொலைகளில் இருக்கும்.

14 எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் இடைப்பட்ட கோணம். எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

$$(\text{அ-து})\ y = \pm \frac{b}{a} x \text{ ஆகும்.}$$

இவை அதிபரவளையத்தின் ஆயத்தோடு சம கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும். இவற்றிடைப்பட்ட கோணம் 2θ என்றால்

$$\tan\theta = \pm \frac{b}{a}.$$

$$\therefore \sec^2\theta = 1 + \frac{b^2}{a^2} = e^2$$

$$\therefore \sec\theta = e.$$

$\therefore$ எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் இடைப்பட்ட கோணம் $2\theta = 2\sec^{-1}(e)$.

15. எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைப் புள்ளி ஒன்றின் அதிபரவளையத்தைச் சார்ந்த துணைக்கோடு எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைக்கு ஒருபோகாக இருக்கும். அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனக் கொண்டால் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளில் ஒன்று $y = \frac{b}{a}x$ ஆகும். இத் தொடுவரையின் புள்ளி ஒன்று (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad y_1 = \frac{b}{a}x_1 \qquad \ldots (1)$$

(x_1, y)-ன் துணைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad \ldots (2)$

இச் சமன்பாட்டில் $y_1 = \frac{b}{a}x_1$-ஐ ஈடாக்கின், துணைக் கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{y \cdot \frac{b}{a}x_1}{b^2} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yx_1}{ab} = 1$$

இக் கோட்டின் 'm' $= \frac{abx_1}{a^2x_1} = \frac{b}{a}$.

∴ துணைக்கோடு எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைக்கு ஒருபோகாக இருக்கும்.

16. அதிபரவளையத்துப் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்கத் தொகை மாறு ராசியாகும்.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனக் கொண்டால் அதன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகள் $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$.

அதிபரவளையத்துப் புள்ளிஒன்றின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

(x_1, y_1)-லிருந்து இக் கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்க்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் நிரலே

$$\frac{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}, \quad \frac{\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} \text{ ஆகும்.}$$

இந் நீளங்களின் பெருக்குத் தொகை $= \dfrac{\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$

$$= \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}, \qquad \left\{\because \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\right\}$$

= மாறு ராசி.

17. S-லிருந்து எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரை ஒன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டு அடி, ஒத்த உயிர்க் கோடும்உதவி வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்றாகும்.

S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$.
எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளுள் ஒன்றின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \qquad (1)$$

இக் கோட்டின் 'm' $= \dfrac{b}{a}$.

∴ S-லிருந்து இக் கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y=-\frac{a}{b}(x-ae) \qquad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் நேர்குத்துக் கோட்டு அடியின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

(1)-லிருந்து $y=\dfrac{b}{a}x$

இம் மதிப்பை (2)-ல் ஈடாக்கின்

$$\frac{b}{a}x=-\frac{a}{b}(x-ae)$$

(அ-து) $x\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{a^2e}{b}$

(அ-து) $x=\dfrac{a^2e\,ab}{b(a^2+b^2)}$

$$= \frac{a^3 e}{a^2 e^2}$$

$$= \frac{a}{e}$$

$$\therefore \quad y = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{e} = \frac{b}{e}.$$

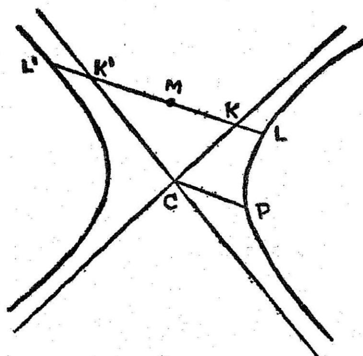
∴ நேர்குத்துக் கோட்டு அடியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right)$

S-ன் ஒத்த உயிர்க்கோடு $x = \frac{a}{e}$ ஆகையால் இப் புள்ளி உயிர்க்கோட்டில் இருக்கும். மையத்திலிருந்து இப்புள்ளியின் தொலை

$$\sqrt{\frac{a^2}{e^2} + \frac{b^2}{e^2}} = a.$$

∴ இப் புள்ளி உதவி வட்டத்திலும் இருக்கும். ஆகவே, இப் புள்ளி உயிர்கோடும் உதவி வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஒன்றாகும்.

18. அதிபரவளையத்து நாண் ஒன்று அதிபரவளையத்தை L, L' புள்ளிகளிலும், எட்டாப் புள்ளி தொடுவரைகளை K, K' புள்ளிகளிலும் வெட்டினால் LK = L'K' என நிறுவுக.



படம்- 110

L, L'-ன் நடுப்புள்ளி M (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

∴ LL′-ன் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$ (1)

எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் தனித்தனிச் சமன்

பாடுகள் $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$ (2)

$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a}$ (3)

ஆகும்.

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் K-ன் ஆயத்தொலை களும், (1), (3) சமன்பாடுகளை விடுத்தால் K′-ன் ஆயத் தொலைகளும் கிடைக்கும்.

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$$x = a\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right), y = \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) b.$$

∴ K-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{a\left(\frac{x_1}{a} y + \frac{y_1}{b}\right), b\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)\right\}$

இம்மாதிரியே K′-ன் ஆயத் தொலைகள்

$$\left\{a\left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right), -b\left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right)\right\}$$

∴ KK′-ன் நடுப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left\{\frac{a\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) + a\left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right)}{2}, \frac{\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)b - \left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right)b}{2}\right\}$$

(அ-து) (x_1, y_1)

∴ KK′-ன் நடுப்புள்ளி M ஆகும்.

∴ LK = L′K′

19. $ax^2 + 2xhy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. சமன்பாடுகள் ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிப்பிட்டால், அதன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள்.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. (1)

என்றால், அதன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்

பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (2)

இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளின் பொது உறுப்புகளான $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ஆதியையும் ஆயங்களையும் மாற்றினும் ஒரே கோவையைத் தரும்.

எனவே, எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு எண்ணுறுப்பில் மட்டுமே அதிபரவளையத்துச் சமன்பாட்டிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும்.

ஆகவே, எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + k = 0.$

இச் சமன்பாடு இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடல் வேண்டும் அல்லது அதிபரவளைய மையவழிச் செல்லவேண்டும். அதற்கேற்ப K-ன் மதிப்பினைக் கொள்ளவேண்டும்.

துணைத் தேற்றம் 1.— ஒரு அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டினை $(lx + my + n)\ (l_1x + m_1y + n_1) = k$ என எழுதினால் அதன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள்
$lx + my + n = 0,\ l_1x + m_1y + n_1 = 0$
இங்கு k ஒரு நிலையெண்.

துணைத் தேற்றம் 2.— $lx + my + n = 0,\ l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகளை எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளாகக் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(lx + my + n)\ (l_1x + m_1y + n_1) = k.$$

இங்கு k ஒரு நிலையெண்.

மாதிரி 6

$3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 14 = 0$ அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளைக் காண்க.

எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + k = 0.$

இச் சமன்பாடு இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடவேண்டும்.

$$\therefore\ 3(-2)\,k + 2\left(\frac{1}{2}\right)\ \left(\frac{17}{2}\right)\ \left(-\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$-\left(-2\right)\left(\frac{17}{2}\right)^2 - k\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad -\frac{49\,k}{4} + \frac{490}{4} = 0$$

$$\therefore \quad k = 10.$$

எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 10 = 0.$

பிறிதொரு முறை : ஆதிவழி எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளுக்கு ஒரு போகான கோடுகளின் சமன்பாடு

$3x^2 - 5xy - 2y^2 = 0$

(அ-து) $(3x + y)(x - 2y) = 0.$

$\therefore$ எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் தனித் தனிச் சமன்பாடு $3x + y + \lambda = 0$, $x - 2y + \lambda' = 0$ எனக் கொள்ளலாம்.

$\therefore \quad (3x + y + \lambda)(x - 2y + \lambda') \equiv 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + k.$

x, y கெழுக்களையும் எண்ணுறுப்புக்களையும் இரு புறத்தும் ஒப்பிட்டால்

$$\lambda + 3\lambda' = 17 \quad (1)$$
$$-2\lambda + \lambda' = 1 \quad (2)$$
$$\lambda\lambda' = k \quad (3)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$$\lambda' = 5, \quad \lambda = 2$$
$$\therefore \quad k = 10.$$

$\therefore$ எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 10 = 0.$

தனித்தனிச் சமன்பாடு $3x + y + 2 = 0,$

$x - 2y + 5 = 0.$

மாதிரி 7.

(5, 3) புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு அதிபரவளையத்தின் மையம் (1, 2). எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் $2x + 3y = 0$, $3x - 2y = 0$ கோடுகளுக்கு ஒருபோகானவை என்றால், அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளை $2x + 3y + \lambda = 0$, $3x - 2y + \lambda' = 0$ எனக் கொள்வோம். இக்கோடுகள் (1, 2) வழிச் செல்வதால்

$$2 + 6 + \lambda = 0, \quad 3 - 4 + \lambda' = 0$$

$\therefore \quad \lambda = -8, \quad \lambda' = 1$

$\therefore$ அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$(2x + 3y - 8)(3x - 2y + 1) = k.$

இது (5, 3) வழிச் செல்வதால்

$(10 + 9 - 8)(15 - 6 + 1) = k.$

$\therefore \quad k = 110.$

$\therefore$ அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$(2x + 3y - 8)(3x - 2y + 1) = 110$

மாதிரி 8

குறித்த கோட்டின், பொது ஆயமுடைய வட்டங்களைச் சார்ந்த துணைப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை, இக் கோட்டுக்கு நேர்குத்தான கோட்டையும் இவ்வட்டங்களின் சமதொடுவரையாயத்துக்கு ஒரு போகான கோட்டையும் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளாகக் கொண்ட அதிபரவளையமென நிறுவுக.

குறித்த கோட்டினை $lx + my + n = 0$ என்றும் பொது ஆயமுடைய வட்டங்களை $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ என்றும் கொள்வோம்.

இங்கு c மாரு ராசி, λ மாறு ராசி.

இவ் வட்டங்களின் சமதொடு வரையாயம் $x = 0$.

$lx + my + n = 0$ (1) கோட்டின், இவ் வட்டங்களைச் சார்ந்த துணைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $xx_1 + yy_1 + \lambda(x + x_1) + c = 0$

(அ-து) $(x_1 + \lambda)x + yy_1 + \lambda x_1 + c = 0$ (2)

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{x_1 + \lambda}{l} = \frac{y_1}{m} = \frac{\lambda x_1 + c}{n}$$

இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து λ-ஐ அகற்றுக.

$$x_1 + \lambda = \frac{ly_1}{m} \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{ly_1}{m} - x_1$$

$$\lambda x_1 + c = \frac{ny_1}{m}.$$

$$\left(\frac{ly_1}{m} - x_1\right)x_1 + c = \frac{ny_1}{m}$$

(அ-து) $(ly_1 - mx_1)\,x_1 + mc = ny_1$

(அ-து) $lx_1 y_1 - mx_1^2 - ny_1 + mc = 0$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $lxy - mx^2 - ny + mc = 0$

இவ் வளைவரையின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$lxy - mx^2 - ny + k = 0$$

ஆதிவழி இக் கோடுகளுக்கு ஒரு போகான கோடுகள்

$lxy - mx^2 = 0$

(அ-து) $x\,(ly - mx) = 0$

(அ-து) $x = 0 \quad ly - mx = 0.$

$\therefore$ எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் $x = 0$, $ly - mx = 0$ கோடுகளுக்கு ஒரு போகானவை:

$x = 0$ சமதொடுவரையாயம், $ly - mx = 0$

$lx + my + n = 0$ கோட்டுக்கு நேர்குத்தான கோடு

20. துணைஇய அதிபரவளையம் (Conjugate Hyperbola) ஒரு அதிபரவளையத்தின் குறுக்காயம் துணையாயமாகவும், துணையாயம் குறுக்காயமாகவும் கொண்ட அதிபரவளையம் துணை இய அதிபரவளையம் எனப்படும். எனவே, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ (1)

-ன் துணை இய அதிபரவளையம் $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ (2)

ஆகும்.

(2)-ன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 0$ எனக் காணலாம்.

ஆகவே, அதிபரவளையத்துக்கும் அதன் துணைஇய அதிபரவளையத்துக்கும் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் பொதுவானவை ஆகும்.

21. துணைஇய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (1)

என்றால் அதன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள், துணைஇய

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடுகள் நிரலே

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளின் பொதுவுறுப்புகளான $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, ஆதியை மாற்றினும் ஆயங்களை மாற்றினும் ஒரே கோவையைத் தரும்.

ஆகவே, $H = 0$, $A = 0$, $H' = 0$ அதிபரவளையம், எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள், துணைஇய அதிபரவளையம் இவற்றின் சமன்பாடுகள் என்றால் $H - A = A - H'$

(அ-து) $H' = 2A - H$.

∴ துணைஇய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$2A - H = 0.$$

மாதிரி 9. ஒரு அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் $2x + y + 4 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$. இவ்வளைவரை $(-1, 2)$ வழிச் சென்றால், இதன் துணைஇய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) = 0$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) = k$$

இது $(-1, 2)$ புள்ளிவழிச் செல்வதால்

$$(-2 + 2 + 4)(-4 + 6 + 1) = k$$

$$\therefore \; k = 12.$$

∴ அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) - 12 = 0.$$

$$\therefore \; A = (2x + y + 4)(4x + 3y + 1)$$

$$H = (2x + y + 4)(4x + 3y + 1) - 12.$$

∴ துணை இய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$2(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) -$$
$$(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) + 12 = 0.$$

(அ-து) $(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) + 12 = 0$

மாதிரி 10.
ஒரு அதிபரவளையத்தின், அதன் துணைஇய அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத்தகவுகள் நிரலே e, e_1 என்றால் $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{{e_1}^2} = 1$ என நிறுவுக.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனக் கொண்டால் அதன் துணைஇய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ஆகும்.

$$b^2 = a^2 (e^2 - 1) \tag{1}$$

துணைஇய அதிபரவளையத்தின் குறுக்காயம், துணையாயம் இவற்றின் நீளங்கள் நிரலே $2b, 2a$ ஆகும்.

$$\therefore a^2 = b^2 ({e_1}^2 - 1) \tag{2}$$

(1), (2) சமன்பாடுகளைப் பெருக்கினால்

$$a^2 b^2 = a^2 b^2 (e^2 - 1) ({e_1}^2 - 1)$$

(அ-து) $(e^2 - 1) ({e_1}^2 - 1) = 1$

(அ-து) $e^2 {e_1}^2 - e^2 - {e_1}^2 = 0$

(அ-து) $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{{e_1}^2} = 1.$

22. துணைஇய விட்டங்கள் (Conjugate Diameters).

$y = mx$, $y = m_1 x$ இரு விட்டங்கள். $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் துணைஇய விட்டங்கள் என்றால் $mm_1 = \frac{b^2}{a^2}$ எனக் கண்டோம். இவ்விட்டங்களுள் ஒன்றுக்கு ஒரு போகான நாண்களை ஏனையது சமமாகப் பிரிக்கும். மேலும், ஒரு விட்டத்து நுனிகளிடத்து வரையும் தொடுவரைகள் ஏனையதற்கு ஒரு போகாக இருக்கும்.

23. ஒரு அதிபரவளையத்தின் விட்டம் அப் பரவளையத்தை மெய்ப் புள்ளிகளில் வெட்டினால். இவ் விட்டத்தின் துணைஇய விட்டம். அதனைக் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்றும், அதன் ஒரு விட்டம் அவ் வளைவரையத்தை P $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ P′ $(-a \sec\theta, -b \tan\theta)$ புள்ளிகளில் வெட்டும் என்றும் கொள்வோம்.

இவ் விட்டத்தின் சமன்பாடு $y=\frac{b \tan\theta}{a \sec\theta}x$.

$$(அ-து) \quad y=\frac{b}{a}\sin\theta\, x \qquad (1)$$

எனவே, இதன் துணையிய விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = \frac{b\,x}{a\sin\theta} \qquad (2)$$

அதிபரவளையமும், (2) கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள் பின்வரும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2\sin^2\theta} = 1$$

$$(அ-து) \quad x^2(\sin^2\theta - 1) = a^2\sin^2\theta.$$

$$(அ-து) \quad x^2 = -a^2\tan^2\theta,$$

$$\therefore \quad x = \pm\, ai\tan\theta.$$

எனவே (2) அதிபரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் $(ai\tan\theta,\ ib\sec\theta)$; $(-ai\tan\theta,\ -ib\sec\theta)$. இப் புள்ளிகள் கற்பனையாகும்.

24. அதிபரவளையத்தின் துணையிய விட்டங்கள், துணையிய அதிபரவளையத்துக்கும் துணையிய விட்டங்களாகும்.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்றும், அதன் துணையிய இரு விட்டங்கள் $y=mx$, $y=m_1x$ என்றும் கொண்டால் $mm_1=\frac{b^2}{a^2}$. துணையிய அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$$(அ-து) \quad \frac{x^2}{(-a^2)} - \frac{y^2}{(-b^2)} = +1$$

$y=mx$, $y=m_1x$ கோடுகள் இவ்வதிபரவளையத்துக்குத் துணையிய விட்டங்களாகும் கட்டுப்பாடு $mm_1=\frac{-b^2}{-a^2}=\frac{b^2}{a^2}$

$\therefore \quad mm_1=\frac{b^2}{a^2}$ என்றால் $y=mx$, $y=m_1x$ கோடுகள் இரு அதிபரவளையங்களுக்கும் துணையிய விட்டங்களாகும்.

25. ஒரு அதிபரவளையத்தின் துணைஇய இரு விட்டங்களுள் ஒன்று அதிபரவளையத்தையும், ஏனையது துணைஇய அதிபர வளையத்தையும் மெய்ப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

PCP′, DCD′ துணைஇய விட்டங்களை $y = mx$, $y = m_1 x$ எனக் கொண்டால், $mm_1 = \frac{b^2}{a^2}$.

P′ CP அதிபரவளையத்தை P′, P புள்ளிகளில் வெட்டும் எனக் கொள்வோம்.

P, P′ புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண $y = mx$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தல் வேண்டும்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2 x^2}{b^2} = 1$$

(அ-து) $$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 m^2}$$

(அ-து) P, P′ புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள்

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, \frac{-ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$$ ஆகும்.

இவ்வாயத் தொலைகளின் மதிப்புகள் மெய்யாகையால்
$b^2 - a^2m^2 > 1$.

(அ-து) $m^2 < \frac{b^2}{a^2}$.

$\therefore \; m < \frac{b}{a}$

$mm_1 = \frac{b^2}{a^2}$ எனவே, $m_1 > \frac{b}{a}$

$y = m_1 x$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால், DCD′ அதிபரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் கிடைக்கும்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m_1^2 x^2}{b^2} = 1$$

(அ-து) $$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2m_1^2}$$

∴ வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள்

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m_1^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m_1^2}}$$

$m_1 > \frac{b}{a}$ ஆகையால், இம்மதிப்புகள் கற்பனையாகும்.

எனவே, DCD' துணைஇய விட்டம் அதிபரவளையத்தைக் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

DCD' விட்டம் $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ துணைஇய அதிபரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண $y = m_1 x$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தல் வேண்டும்.

$$\frac{m_1^2 x^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 m_1^2 - b^2}$$

DCD', துணைஇய அதிபரவளையத்தை வெட்டும்புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள்

$$\frac{ab}{\sqrt{(a^2 m_1^2 - b^2)}}, -\frac{ab}{\sqrt{(m_1^2 a^2 - b^2)}}$$

$m_1 > \frac{b}{a}$ ஆகையால் இவ்வாயத் தொலைகளுக்கு மெய் மதிப்புகள் வரும்.

எனவே, DCD', துணைஇய அதிபரவளையத்தை மெய்ப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

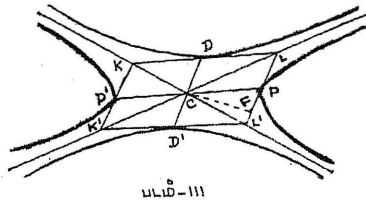
எனவே, துணைஇய இரு விட்டங்களுள் ஒன்று அதிபரவளையத்தையும், ஏனையது துணைஇய அதிபரவளையத்தையும் மெய்ப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

26. துணைஇய இரு விட்டங்கள் அதிபரவளையத்தையும் அதன் துணைஇய அதிபரவளையத்தையும் நிரலே P, P', D, D' புள்ளிகளில் வெட்டினால்,

(1) $CP^2 - CD^2 = a^2 - b^2$

(2) P, D இடத்துத் தொடுவரைகள் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளுள் ஒன்றில் வெட்டும்.

(3) P, P', D, D' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளால் அமைந்த ஒருபோகு நாற் சிறையின் பரப்பு = $4ab$.



படம்-111

P புள்ளி ($a \sec\theta$, $b \tan\theta$) எனக் கொள்க.

CP-ன் சமன்பாடு $y = \dfrac{b\tan\theta}{a\sec\theta}x$

$$= \frac{b}{a}\sin\theta\, x$$

∴ இதன் துணைஇய விட்டத்தின் சமன்பாடு $y = m_1 x$ எனக்கொண்டால் $m_1 \dfrac{b}{a}\sin\theta = \dfrac{b^2}{a^2}$

$$\therefore \quad m_1 = \frac{b}{a\sin\theta}$$

எனவே, CD-ன் சமன்பாடு $y = \dfrac{b}{a\sin\theta}x$

இக்கோடு துணைஇய அதிபரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் ($a\tan\theta$, $b\sec\theta$), ($-a\tan\theta$, $-b\sec\theta$) எனக் காணலாம்.

∴ D-ன் ஆயத்தொலைகள் ($a\tan\theta$, $b\sec\theta$) ஆகும்.

$$CP^2 = a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta$$

$$CD^2 = a^2\tan^2\theta + b^2\sec^2\theta$$

எனவே, $CP^2 - CD^2 = a^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta) - b^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta)$

$$= a^2 - b^2.$$

மேலும், P, D இடத்துத் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\sin\theta = \cos\theta \qquad (1)$$

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\sin\theta = \cos\theta \qquad (2)$$

இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $x = \dfrac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}$, $y = \dfrac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}$

எனவே, (1), (2) வெட்டும் புள்ளி L $\left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}, \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$,

$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரையில் இருக்கும்.

இம் மாதிரியே P, D′ இடத்துத் தொடுவரைகள் L′ லும் P′, D இடத்துத் தொடுவரைகள் K-லும், P′, D′ இடத்துத்தொடுவரைகள் K′-லும் வெட்டும்

P இடத்துத் தொடுவரை $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\theta=\cos\theta$.

CD-ன் சமன்பாடு $y=x\frac{b}{a\sin\theta}$

(அ-து) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\theta=0$

எனவே, P இடத்துத் தொடுவரையும். CD யும் ஒரு போகுக் கோடுகளாகும்.

இம்மாதிரியே D இடத்துத்தொடுவரையும் CPயும் ஒரு போகுக் கோடுகளாகும்.

LL′ K′K, PCDL நாற்சிறைகள் ஒரு போகு நாற்சிறைகள் என்றும், LL′ K′K = 4 PCDL என்றும் எளிதிற் காணலாம்.

C-லிருந்து P இடத்துத் தொடுவரைக்கு வரையும் நேர்

குத்துக் கோட்டின் நீளம் CF $=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\sin^2\theta}}$

$$=\frac{ab\cos\theta}{\sqrt{b^2+a^2\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{ab}{\sqrt{b^2\sec^2\theta+a^2\tan^2\theta}}$$

$$=\frac{ab}{CD}.$$

PCDL நாற் சிறையின் பரப்பு = CD. CF = ab

∴ LL′ K′K நாற்சிறையின் பரப்பு = $4ab$.

துணைத்தேற்றம் 1. PL = CD = CD′ = PL′

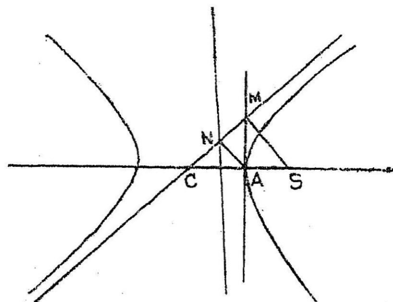
எனவே, எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளிடைப்பட்ட P இடத்துத் தொடுவரையை P சமமாகப் பிரிக்கும்.

துணைத்தேற்றம் 2. LCL′ முக்கோணத்தின் பரப்பு $=\frac{1}{4}$ LL′ K′K நாற்சிறையின் பரப்பு = ab.

எனவே, அதிபரவளையத்து எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளாலும் ஒரு தொடுவரையாலும் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு நிலை ராசியாகும்.

மாதிரி – 11

எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரை ஒன்று உயிர்க் கோட்டை, A முனையிடத்துத் தொடுவரையை நிரலே N,M புள்ளிகளில் வெட்டினால் AN, SM ஒருபோகுக் கோடுகள் என நிறுவுக.



படம் – 112

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனக் கொண்டால் S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$ ஒத்த உயிர்க் கோட்டின் சமன்பாடு $x = \frac{a}{e}$, எட்டாப் புள்ளித் தொடு வரை ஒன்றின் சமன்பாடு $y = \frac{b}{a}x$ ஆகும்

A இடத்துத் தொடுவரையும், எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரையும் வெட்டும் புள்ளி M ஆகையால் அதன் ஆயத்தொலைகள் (a, b) ஆகும்.

உயிர்க்கோடும், எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரையும் வெட்டும் புள்ளி N ஆகையால் அதன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right)$

$$\text{SM-ன் } 'm' = \frac{b-0}{a-ae} = \frac{b}{a(1-e)}$$

$$\text{AN-ன் } 'm' = \frac{\frac{b}{e}-0}{\frac{a}{e}-a} = \frac{b}{a(1-e)}$$

$\therefore$ SM, AN கோடுகள் ஒரு போகானவை.

பயிற்சிகள் —21

1. ஆதிவழி, $3x - 4y + 7 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$ கோடுகளை எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளாகக் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

2. ஆதிவழி, $2x - 3y + 7 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$ கோடுகளை எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளாகக் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

3. $(1, 1)$ புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் $2x - y - 3 = 0$ $3x + y - 7 = 0$ என்றால், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

4. $(1, 2)$ புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$ என்றால், அதன் சமன்பாட்டினைக் காண்க,

5. கீழ்வரும் அதிபரவளையங்களின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளைக் காண்க:

1. $2x^2 + 2xy - 3x + y = 0$
2. $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y - 4 = 0$
3. $6x^2 - 7xy - 3y^2 + x + 4y = 0.$

6, பின்வரும் அதிபரவளையங்களின் துணைஇய அதிபரவளையங்களைக் காண்க:

1. $2xy + 7x - 6y - 18 = 0$
2. $(lx + my + n)(l_1x + m_1y + n_1) = k^2$
3. $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 14 = 0$
4. $4x^2 + 13xy + 3y^2 + x + 3y - 25 = 0.$
5. $(-1, 2)$ வழி $2x + y + 4 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$ கோடுகளை எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளாகக் கொண்ட அதிபரவளையம்.

7. ஒரு அதிபரவளேயத்தின் உயிர்ப் புள்ளிகளுள் ஒன்று ஆதி, ஒத்த உயிர்க்கோடு $x + y + 1 = 0$, மையத் தொலேத் தகவு $\sqrt{2}$ என்றுல், அதன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகளேக் காண்க.

8. $x = 2$ கோட்டைத் தொடும் அதிபரவளேயத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் $x + y + 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்றுல்?

9. ஒரு அதிபரவளேயத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரை களுள் ஒன்று $x - 2y + 3 = 0$, ஏனேயது $3x = 2y$-க்கு ஒரு போகான கோடு ஆகும். இவ் வளேவரைக்கு ஆதி வழியாகவும் ஆதியிடத்துத் தொடுவரை $x = y$ ஆகவும் இருந்தால், இதன் சமன்பாட்டினேக் காண்க. இதன் மையம் y ஆயத்தது என நிறுவுக.

10. $x + 2y - 5 = 0$ கோட்டினே எட்டாப் புள்ளித் தொடு வரைகளுள் ஒன்றுகக்கொண்டு $17x + 16y = 0$-ஐ ஆதியிடத்து தொடும் $\left(-\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் அதிபரவளேயத்தின் சமன்பாடு என்ன?

11. $x^2 - y^2 = a^2$ அதிபரவளேயத்து நேரகல நுனிகளிடத்துத் தொடுவரைகள், துணே இய அதிபரவளேயத்தின் மூனேகள் வழிச் செல்வன என நிறுவுக.

12. ஒரு அதிபரவளேயச் செங்கோட்டுக்கு மையத்திலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக்கோடு வளேவரையை மெய்ப் புள்ளிகளில் வெட்டாது என நிறுவுக.

13. ஒரு அதிபரவளேயத்தின் தொடுவரை ஒன்று எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளே T, T′ புள்ளிகளில் வெட்டினுல், தொலேயிலிருக்கும் உயிர்ப்புள்ளியோடு TT′ பிறப்பிக்கும் கோணம், எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளிடைப்பட்ட கோணத் தின் பாதி என நிறுவுக.

14. அதிபரவளேயத்தின் P புள்ளி வழி எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரை ஒன்றுக்கு ஒருபோகாக வரையும் கோடு உயிர்க் கோட்டினே M-ல் வெட்டின் $PM = SP$ என நிறுவுக.

15. அதிபரவளேயத்தின் P இடத்துத் தொடுவரைக்கு ஒரு போகான நாண் QQ', எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரை ஒன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோடுகள் PN, QM, $Q'M'$ என்றுல் $QM \cdot Q'M' = PN^2$ என நிறுவுக.

16. அதிபரவளையத்தின் P, Q புள்ளிகள் வழி எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளுக்கு ஒரு போசாக வரையும் கோடுகள் K-ல் வெட்டினால் PQ, வை CK சமமாகப் பிரிக்கும் என நிறுவுக.

17. P அதிபரவளையம் ஒன்றின் வேறுபடும் புள்ளி, Q, R நிலைப் புள்ளிகள், PQ, PR கோடுகள் ஒரு எட்டாப் புள்ளித் தொடு வரையை L, M புள்ளிகளில் வெட்டினால் LM ஒரு மாறு ராசியென நிறுவுக.

18. அதிபரவளையத்தின் P புள்ளி இடத்துத் தொடுவரை எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளை A, B புள்ளிகளில் வெட்டினால் ABC முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையத்தின் இயங்குவரை ஒரு அதிபரவளையமெனவும், இவ்வதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் முதல் அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளுக்கு நேர்குத்தானவை எனவும் நிறுவுக.

19. உயிர் வட்டத்தில் T புள்ளியிலிருந்து அதிபரவளையத் துக்கு இரு தொடுவரைகள் வரையப்பட்டுள. இத் தொடுநாண் எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரை ஒன்றை R-லும்; CT-ன் நீட்சியை V-லும் வெட்டினால் $RV^2 = CV.\ TV$ என நிறுவுக. இங்கு C அதிபரவளையத்தின் மையமாகும்.

20. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளையத்தின் P இடத்துத் தொடு வரை எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டினால், CQR முக்கோணச் சுற்று வட்ட மையத்தின் இயங்கு வரை $4(a^2 x^2 - b^2 y^2) = (a^2 + b^2)^2$ என நிறுவுக. இங்கு அதிபரவளையத்தின் மையம் C ஆகும்.

27. செவ்வக அதிபரவளையம் (Rectangular Hyperbola)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளையத்தின் எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரை களின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ எனக் கண்டோம். எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் தம்முள் நேர்க் குத்தாக இருந்தால் அஃதாவது எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரை களிடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணமென்றால், அதிபரவளையம் செவ்வக அதிபரவளையம் (Rectangular Hyperbola) எனப்படும்.

இந் நிலையில் $\frac{b}{a} \times -\frac{b}{a} = -1.$

$\therefore \quad b^2 = a^2$

(அ-து) $b = a$

$\therefore$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 - y^2 = a^2$, அதன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகள் $y = x$, $y = -x$.

$\therefore$ எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகள் குறுக்காயத்தோடு $45°$ சாய்வில் இருக்கும்.

உயிர்வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2 - a^2 = 0$.

இது (0, 0) புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு புள்ளி வட்டமாகும். எனவே, செவ்வக அதிபரவளையத்தின் உயிர் வட்டம் அதிபரவளையத்தின் மையமாகும்.

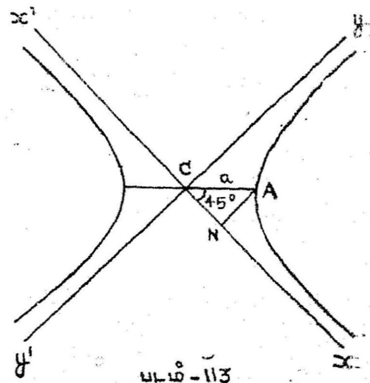
28. எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளை x, y ஆயங்களாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபரவளையச் சமன்பாடு. எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகள் x, y ஆயங்களாகையால் அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$x = 0, \quad y = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு $xy = 0$.

$\therefore$ அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$xy = k \qquad$ (k ஒரு நிலையெண்)



படம் - 113

அதிபரவளையக் குறுக்காயத்தின் நீளம் $2a$ என்றால் $CA = a$. A-ன் ஆயத்தொலைகள் (CN, NA)

(அ-து) (CA cos 45°, CA sin 45°)

(அ-து) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$xy = k$, A புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = k$$

$$\therefore \quad k = \frac{a^2}{2}.$$

$\therefore$ செவ்வக அதிபரவளையச் சமன்பாடு.

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$

$\frac{a^2}{2} = c^2$ எனக்கொண்டால் இச் சமன்பாடு

$xy = c^2$ என்று வரும்.

29. $xy = c^2$ அதிபரவளையத்தில்

(1) (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை $xy_1 + yx_1 = 2c^2$.

(x_1, y_1) அதிபரவளையத்தில் இருப்பதால் $x_1y_1 = c^2$

$$\therefore \quad xy_1 + yx_1 = 2x_1y_1$$

(அ-து) $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2.$

(2) (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோடு $xy_1 + yx_1 = 2c^2$.

(3) (x_1, y_1)-ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு $\frac{xy_1 + yx_1}{2} - c^2 = x_1y_1 - c^2$.

(அ-து) $xy_1 + yx_1 = 2x_1y_1$

(அ-து) $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2.$

30. $xy = c^2$ சமன்பாட்டில் $x = ct,\ y = \frac{c}{t}$-ஐ ஈடாக்கினால் பொருந்தும்.

எனவே, t-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ புள்ளி செவ்வக அதிபரவளையத்தது. இப் புள்ளியை 't' எனக் கூறுவது மரபு.

't_1' 't_2', புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண். 't_1' 't_2', புள்ளிகள் $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$. ஆகையால், இப் புள்ளிகளை இணைக்குங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - \frac{c}{t_1}}{\frac{c}{t_1} - \frac{c}{t_2}} = \frac{x - ct_1}{ct_1 - ct_2}$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{\left(y - \frac{c}{t_1}\right) t_1 t_2}{c\,(t_2 - t_1)} = \frac{x - ct_1}{c(t_1 - t_2)}$$

$(t_1 - t_2)$ சினையை அகற்றவே

$$-\left(y - \frac{c}{t_1}\right) t_1 t_2 = x - ct_1$$

$$\text{(அ-து)} \quad -yt_1t_2 + ct_2 = x - ct_1$$

$$\text{(அ-து)} \quad \underline{x + yt_1 t_2 = c\,(t_1 + t_2)}$$

இச் சமன்பாட்டில் $t_1 = t_2 = t$ எனக் கொண்டால் 't' இடத்துத் தொடுவரை கிடைக்கும்.

$\therefore$ t இடத்துத் தொடுவரை $\underline{x + yt^2 = 2ct}$. இத் தொடுவரையின் '$m$' $= -\frac{1}{t^2}$

$\therefore$ 't' இடத்துச் செங்கோட்டின் 'm' $= t^2$.

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - \frac{c}{t} = t^2\,(x - ct)$$

$$\text{(அ-து)} \quad \underline{y - xt^2 = \frac{c}{t}(1 - t^4)}$$

't_1', 't_2' இடத்துத் தொடுவரைகள்

$$x + yt_1^2 = 2ct_1$$
$$x + yt_2^2 = 2ct_2$$

இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $x = \frac{2ct_1\,t_2}{t_1 + t_2}$, $y = \frac{2c}{t_1 + t_2}$

∴ 't_1', 't_2' இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி
$$\left(\frac{2ct_1 t_2}{t_1 + t_2}, \frac{2c}{t_1 + t_2}\right)$$

இப் புள்ளியின் துணைக்கோடு 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடாகும்.

எனவே, 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டின் துணைப்புள்ளி $\left(\frac{2ct_1 t_2}{t_1 + t_2}, \frac{2c}{t_1 + t_2}\right)$ ஆகும்.

மாதிரி—12

$xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் $2l$ நீளமுடைய நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $(x^2 + y^2)(xy - c^2) = l^2xy$ என நிறுவுக.

$2l$ நீளமுடைய நாண் ஒன்றின் நுனிகள் 't_1', 't_2' என்றும் அந் நாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) என்றும் கொண்டால்

$$2x_1 = ct_1 + ct_2 \quad \dots \quad (1)$$

$$2y_1 = \frac{c}{t_1} + \frac{c}{t_2} \quad \dots \quad (2)$$

$$4l^2 = (ct_1 - ct_2)^2 + \left(\frac{c}{t_1} - \frac{c}{t_2}\right)^2 \quad \dots \quad (3)$$

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து t_1, t_2-ஐ அகற்றுக.

(3) லிருந்து $4l^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 + c^2\frac{(t_1 - t_2)^2}{t_1^2 t_2^2}$

$$\text{(அ-து)}\ 4l^2 = \frac{c^2(t_1 - t_2)^2(t_1^2 t_2^2 + 1)}{t_1^2 t_2^2}.$$

$$= \frac{c^2\{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2\}(t_1^2 t_2^2 + 1)}{t_1^2 t_2^2} \quad (4)$$

(1) லிருந்து $t_1 + t_2 = \frac{2x_1}{c}$

(2) லிருந்து $2y_1 = \frac{c(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = \frac{2x_1}{t_1 t_2}$

$$\therefore\ t_1 + t_2 = \frac{2x_1}{c},\ t_1 t_2 = \frac{x_1}{y_1}$$

இம் மதிப்புகளை (4)-ல் ஈடாக்கின்

$$4l^2 = \frac{c^2 \left\{\frac{4x_1^2}{c^2} - \frac{4x_1}{y_1}\right\} \left(\frac{x_1^2}{y_1^2} + 1\right)}{\frac{x_1^2}{y_1^2}}$$

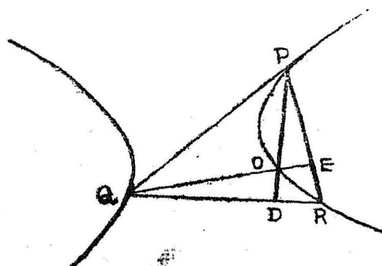
(அ-து) $4l^2 = \frac{4x_1}{y_1} \frac{(x_1 y_1 - c^2)(x_1^2 + y_1^2)}{x_1^2}$

(அ-து) $l^2 x_1 y_1 = (x_1 y_1 - c^2)(x_1^2 + y_1^2)$.

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $l^2 xy = (xy - c^2)(x^2 + y^2)$.

31. ஒரு செவ்வக அதிபரவளையம் ஒரு முக்கோண முனைகள் வழிச்சென்றால் அது (அதிபரவளையம்) முக்கோணத்தின் செங் கோட்டு மையம் வழிச் செல்லும்.

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $xy = c^2$ எனவும் முக்கோணத்தின் முனைகள் $P\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$, $Q\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$, $R\left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right)$ எனவும் கொள்வோம்.



படம் - 114

QR-ன் சமன்பாடு $x + yt_2t_3 = c(t_2 + t_3)$

$$QR\text{-ன் } `m' = -\frac{1}{t_2t_3}.$$

QR-ன் நேர்க்குத்துக் கோட்டின் 'm' $= t_2t_3$ PD, QR-க்கு நேர்குத்தாக இருந்தால் அதன் சமன்பாடு

$$y - \frac{c}{t_1} = t_2t_3(x - ct_1)$$

$$(\text{அ-து})\ y - t_2t_3x = \frac{c}{t_1} - ct_1 t_2t_3 \quad \ldots (1)$$

இம்மாதிரியே PR-ன் நேர்க்குத்துக்கோடு QE-ன் சமன்பாடு

$$y - t_1 t_3 x = \frac{c}{t_2} - c t_1 t_2 t_3 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$$x = -\frac{c}{t_1 t_2 t_3}, \quad y = -c t_1 t_2 t_3$$

∴ PQR முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்.

$$\left(-\frac{c}{t_1 t_2 t_3}, \; -c t_1 t_2 t_3 \right)$$

இவ்வாயத்தொலைகள் $xy = c^2$ சமன்பாட்டில் பொருந்துவதால் இப் புள்ளி அதிபரவளையத்தில் இருக்கும்.
இப் புள்ளியை, t_4 எனக் கொண்டால் $t_1 t_2 t_3 t_4 = -1$.

32. (h, k) புள்ளி வழி ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தின் நான்கு செங்கோடுகள் செல்லுமெனவும், அச் செங்கோடுகளின் அடிகள் ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளும் அதன் செங்கோட்டு மையமும் ஆகும் எனவும் நிறுவுக.

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $xy = c^2$ எனக் கொள்க. இதன் 't' இடத்துச் செங்கோடு (h, k) புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக்கொண்டால்

$$k - ht^2 = \frac{c}{t}(1 - t^4).$$

$$(\text{அ-து}) \quad ct^4 - ht^3 + kt - c = 0 \qquad \ldots (1)$$

இது நாற்படிச் சமன்பாடு ஆகையால் நான்கு தீர்வுகள் உண்டு. இத் தீர்வு ஒவ்வொன்றுக்கும் எதிர் நிலையாக ஒரு செங்கோடு (h, k) புள்ளிவழிச் செல்லும். எனவே, (h, k) வழி நான்கு செங்கோடுகள் செல்லும்.

அவற்றின் அடிகள் 't_1', 't_2', 't_3' 't_4' என்றால் (1)-ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 ஆகும்.

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{h}{c} \qquad \ldots (2)$$

$$\Sigma t_1 t_2 = 0 \qquad \ldots (3)$$

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = -\frac{k}{c} \qquad \ldots (4)$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1 \qquad \ldots (5)$$

t_1', 't_2', 't_3', 't_4' புள்ளிகள் P, Q, R, T என்றால்
PQR முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்

$$\left(-\frac{c}{t_1\, t_2\, t_3},\ -ct_1\, t_2\, t_3 \right)$$

(அ-து) $\left(ct_4,\ \frac{c}{t_4} \right)$, {(5) சமன்பாட்டால்}

PQR முக்கோணத்தின் செங்கோடு மையம் T ஆகும்.

மாதிரி—13

ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தில் வரைந்த ABC முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒரு எட்டாப் புள்ளித் தொடு வரையோடு α, β, γ கோணங்களைப் பிறப்பிக்கின்றன. A, B, C புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் சென்றால் $\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = 0$ என நிறுவுக.

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $xy = c^2$ எனவும், A, B, C புள்ளிகள் 't_1', 't_2', 't_3' எனவும் இப் புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) புள்ளிவழிச் செல்லும் எனவும் (h, k)-லிருந்து செவ்வக அதிபரவளையத்துக்கு வரையும் நான்காவது செங்கோட்டடி 't_4' எனவும் கொள்க.

$$\therefore \quad \Sigma t_1\, t_2 = 0 \qquad \{\text{பகுதி } 32\,(3)\} \qquad (1)$$

$$t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = -1 \qquad \{\ ,, \quad (5)\} \qquad (2)$$

AB-ன் சமன்பாடு $x + yt_1\, t_2 = c\,(t_1 + t_2)$

BC-ன் சமன்பாடு $x + yt_2\, t_3 = c\,(t_2 + t_3)$

CA-ன் சமன்பாடு $x + yt_3\, t_1 = c\,(t_1 + t_3)$

$xy = c^2$-ன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் x, y ஆயங்களாகும்.

ABC முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் α, β, γ கோணங்களில் சாய்ந்திருக்கும் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரை $y = 0$ எனக் கொண்டால்,

$$\tan \alpha = -\frac{1}{t_1\, t_2},\ \tan \beta = -\frac{1}{t_2\, t_3},\ \tan \gamma = -\frac{1}{t_3\, t_1}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} = \frac{1 - \dfrac{1}{t_1^2 t_2^2}}{\dfrac{-2}{t_1\, t_2}} = \frac{1 - t_1^2 t_2^2}{2\, t_1\, t_2}$$

இம்மாதிரியே $\cot 2\beta = \dfrac{1 - t_2^2 t_3^2}{2t_2 t_3}$, $\cot 2\gamma = \dfrac{1 - t_3^2 t_1^2}{2t_3 t_1}$

$\therefore \cot 2\alpha + \cot 2\beta + \text{Cot } 2\gamma$

$$= \frac{1 - t_1^2 t_2^2}{2t_1 t_2} + \frac{1 - t_2^2 t_3^2}{2t_2 t_3} + \frac{1 - t_3^2 t_1^2}{2t_3 t_1}$$

$$= \frac{t_3 - t_1^2 t_2^2 t_3 + t_1 - t_1 t_2^2 t_3^2 + t_2 - t_1^2 t_2 t_3^2}{2t_1 t_2 t_3}$$

$$= \frac{t_1 + t_2 + t_3 - t_1 t_2 t_3 (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)}{2t_1 t_2 t_3}$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து t_4-ஐ அகற்றுக

$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4 = 0.$

(அ-து) $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 + t_4 (t_1 + t_2 + t_3) = 0.$

(அ-து) $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 - \dfrac{1}{t_1 t_2 t_3} (t_1 + t_2 + t_3) = 0$

(அ-து) $(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)(t_1 t_2 t_3 - t_1 + t_2 + t_3) = 0$

$\therefore \cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = 0.$

33. ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் நான்கு செங்கோட்டடிகள் மற்றொரு செவ்வக அதிபர வளையத்தில் இருக்கும்.

$xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் 't' இடத்துச் செங்கோடு (h, k) புள்ளி வழிச் சென்றால்

$ct^4 - ht^3 + kt - c = 0$ எனக் கண்டோம்.

(அ-து) $c^2 t^2 - h\,ct + \dfrac{kc}{t} - \dfrac{c^2}{t^2} = 0.$ ... (1)

(x_1, y_1) புள்ளி 't' என்றால் $x_1 = ct$, $y_1 = \dfrac{c}{t}$ இம் மதிப்புகளை (1)-ல் ஈடாக்கினால்

$x_1^2 - hx_1 + ky_1 - y_1^2 = 0$

$\therefore (x_1, y_1)$ புள்ளி $x^2 - y^2 - hx + ky = 0$ வளைவரையில் இருக்கும்.

இது $(0, 0)$, (h, k) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு செவ்வக அதிபரவளையமென எளிதிற் காணலாம்.

34 செவ்வக அதிபரவளையமும் ஒரு வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள்.

செவ்வக அதிபரவளையத்தின், வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

$$xy = c^2 \quad \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + k = 0 \quad \dots (2)$$

எனக் கொள்க.

அதிபரவளையத்துப் புள்ளி ஒன்றின் ஆயத்தொலைகள் $\left(ct, \frac{c}{t} \right)$. இப் புள்ளி வட்டத்தில் இருந்தால்

$$c^2 t^2 + \frac{c^2}{t^2} + 2gct + \frac{2fc}{t} + k = 0$$

$$(\text{அ-து})\ c^2 t^4 + 2gct^3 + kt^2 + 2fct + c^2 = 0 \quad \dots (3)$$

இது நாற்படிச் சமன்பாடு ஆகையால் நான்கு தீர்வுகள் உள. ஒவ்வொரு தீர்வுக்குத்தக ஒரு வெட்டுப் புள்ளி கிடைக்கும். எனவே, ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தை ஒரு வட்டம் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

(3)-ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனக் கொண்டால்,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{2g}{c}$$

$$\Sigma t_1 t_2 = \frac{k}{c^2}$$

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = -\frac{2f}{c}$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1.$$

மாதிரி—14

ஒரு வட்டம் செவ்வக அதிபரவளையம் ஒன்றை P, Q, R, T புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அதிபரவளையத்தின் மையம் C, வட்டத்தின் ஆரை r எனின், $CP^2 + CQ^2 + CR^2 + CT^2 = 4r^2$ என நிறுவுக.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + k = 0$ என்றால், $r^2 = g^2 + f^2 - k$.

இவ் வட்டம் $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q, R, T நிரலே 't_1', 't_2', 't_3', 't_4' என்றால்,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{2g}{c}$$

$$\Sigma t_1 t_2 = \frac{k}{c^2}$$

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = -\frac{2f}{c}$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$$

C-ன் ஆயத்தொலைகள் (0 0,)

$$\therefore \; CP^2 + CQ^2 + CR^2 + CT^2$$

$$= c^2 t_1^2 + \frac{c^2}{t_1^2} + c^2 t_2^2 + \frac{c^2}{t_2^2} + c^2 t_3^2 + \frac{c^2}{t_3^2} + c^2 t_4^2 + \frac{c^2}{t_4^2}$$

$$= c^2 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) + c^2 \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} + \frac{1}{t_4^2} \right)$$

$$= c^2 \{ (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2 - 2 \Sigma t_1 t_2 \} + c^2 \left\{ \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} \right)^2 - 2\Sigma \frac{1}{t_1, t_2} \right\}$$

$$\Sigma t_1 t_2 = \frac{k}{c^2}, \Sigma \frac{1}{t_1 t_2} = \frac{\Sigma t_1 t_2}{t_1 t_2 t_3 t_4} = \Sigma t_1 t_2 = \frac{k}{c^2}$$

$$\therefore CP^2 + CQ^2 + CR^2 + CT^2$$

$$= c^2 \left\{ \left(\frac{-2g}{c} \right)^2 - \frac{2k}{c^2} \right\} + c^2 \left\{ \left(\frac{-2f}{c} \right)^2 - \frac{2k}{c^2} \right\}$$

$$= 4g^2 + 4f^2 - 4k$$

$$= 4(g^2 + f^2 - k)$$

$$= 4r^2$$

மாதிரி—15.

முந்தின பயிற்சியின் PQR முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம், T-ன் விட்ட எதிர்ப்புள்ளி (Diametrically Opposite Point) என நிறுவுக.

P, Q, R, T புள்ளிகள் 't_1', 't_2', 't_3', 't_4',

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$$

PQR முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்.

$$\left(-\frac{c}{t_1t_2t_3},\quad -ct_1t_2t_3\right)$$

(அ-து) $\left(-ct_4, -\frac{c}{t_4}\right)$

இப் புள்ளி $\left(ct_4, \frac{c}{t_4}\right)$ அஃதாவது T-ன் விட்ட எதிர்ப்புள்ளியாகும்.

பயிற்சிகள் 22

1. $xy = c^2$ அதிபரவளையத்தின் உயிர்ப் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளையும், உயிர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

2. m-ன் அனைத்து மதிப்புக்கும் $y + mx = 0$, $y - mx = 0$ கோடுகள் $xy = c^2$-ன் துணை இய விட்டங்கள் என நிறுவுக.

3. ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தின் துணை இய இரு விட்டங்கள் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளோடு சமச் சாய்வுடையனவாக இருக்கும் என நிறுவுக.

4. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் துணை இய இரு விட்டங்கள் $x - \alpha = 0$, $y - \beta = 0$ எனின் (α, β) புள்ளி $xy = 2c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

5. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P புள்ளியிலிருந்து அதன் ஆயங்களுக்கு PM, PN நேர்குத்துக் கோடுகள் வரையின் P இடத்துத் தொடுவரை MN-க்கு ஒரு போகாகும் என நிறுவுக.

6. ஒரு புள்ளியின் $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தைச் சார்ந்த துணைக்கோடு $x^2 = 4by$ பரவளையத்தைத் தொட்டால், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு செவ்வக அதிபரவளையம் என நிறுவுக.

7. செவ்வக அதிபரவளையத்தில் A, B நிலைப் புள்ளிகள், P வேறுபடும் புள்ளி. PA, PB கோடுகள் எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரை ஒன்றை K, L-ல் வெட்டினுல் KL-ன் நீளம் நிலைத்தது என நிறுவுக.

8. செவ்வக அதிபரவளையம் ஒன்றில் ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரையின் அதன் சுற்று வட்ட மையம் வளைவரையில் இருக்குமென நிறுவுக.

9. $xy = 1$ செவ்வக அதிபரவளையமும் $x^2 + 4y^2 = 4$ நீள் வட்டமும் $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ புள்ளியிடத்துத் தொடும் என நிறுவுக.

10. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத் தொடுவரைகளின் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த துணைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வரை $4c^2\, xy = a^4$ என நிறுவுக.

11. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்துப் புள்ளி ஒன்றின் ஆயத்தொலைகள் மாறு ராசி θ ஆல் $(c \tan \theta, c \cot \theta)$ எனக் குறிப்பிடின், θ, $\theta + \alpha$ இடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை $4\,(c^2 - xy) = (x + y)^2 \tan^2 \alpha$ என நிறுவுக.

இங்கு α ஒரு நிலைக் கோணமாகும்.

12. ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தின் PQ, PR நாண்களின் இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணமெனின், P-லிருந்து QR-க்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோடு அதிபரவளையத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

13. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளையமும் $y^2 = 4ax$ பரவளையமும் வெட்டும் புள்ளியிடத்துத் தொடுவரைகள் x ஆயத்தோடு நிரலே α, β கோணங்களில் சாய்ந்திருப்பின் $\tan \alpha + 2 \tan \beta = 0$ என நிறுவுக.

14. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஒரு விட்டம் PP′. P இடத்துத் தொடுவரையும் P′ வழி ஒரு எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைக்கு ஒருபோகாக வரையும் கோடும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை $xy + 3c^2 = 0$ என நிறுவுக.

15. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் விட்டமொன்று PP′. P இடத்துத் தொடுவரை எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளை வெட்டும் புள்ளிகள் Q, R எனின், P′Q, P′R கோடுகள் $3xy + c^2 = 0$ அதிபரவளையத்தின் தொடுவரைகள் என நிறுவுக.

16. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தில் வரைந்த ஒரு முக்கோணத்தின் இருபக்கங்கள் $xy = 4c^2$ அதிபரவளையத்தைத் தொட்டால், மூன்ருவது பக்கம் $xy = 49c^2$ அதிபரவளையத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

17. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் $(2h, 2k)$ வழிச் செல்லும் நாண்கள் தம் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை

$(x - h)(y - k) = hk$ என நிறுவுக.

18. (h, k) இடத்துச் சமமாகப் பிரிக்கப்படும் $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைய நாணின் நீளம்

$$\sqrt{\frac{(h^2 + k^2)(hk - c^2)}{hk}}$$ என நிறுவுக.

19. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் புள்ளி ஒன்றின் ஆயத்தொலைகள் $(c \tan \theta, c \cot \theta)$. $\theta + \theta_1$ ஒரு நிலையெண் என்ருல் 'θ' 'θ_1' புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு ஒரு நிலைப் புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

20. $x^2 = 4ay$ பரவளையத்தின் தொடுவரை ஒன்று $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினுல், PQ-வின் நடுப்புள்ளி ஒரு நிலைத்த பரவளையத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

21. செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஒருபோகு நாண்களை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் பொது ஆயமுடைய வட்டங்கள் என நிறுவுக.

22. அதிபரவளையத்தின் நாண்கள் PQ, RT தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பின் இந் நாற் புள்ளிகளுள் மூன்ருல் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் நாலாவது புள்ளியென நிறுவுக.

23. செவ்வக அதிபரவளைய உயிர்ப்புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டமொன்று எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளை P, P', Q, Q' புள்ளிகளில் வெட்டின் PQ, P'Q', அதிபரவளையத்தின் தொடுவரைகள் என நிறுவுக.

24. $xy = c^2$-ன் 't' இடத்துச் செங்கோடு செவ்வக அதிபரவளையத்தை மீண்டும் 't_1'-ல் வெட்டினால் $t_1 = -\dfrac{1}{t^3}$ என நிறுவுக. PQ-ன் நீளம் CP^3-க்குத் தக வேறுபடும் என நிறுவுக. C செவ்வக அதிபரவளையத்து மையமாகும்.

25. C-ஐ மையமாகக் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் P இடத்துச் செங்கோடு வளைவரையை மீண்டும் Q-ல் வெட்டினால் $PQ^2 = 3CP^2 + CQ^2$ என நிறுவுக.

26. செவ்வக அதிபரவளையச் செங்கோடு குறுக்காயத்தோடு θ கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின், அது அதிபரவளையத்தைமீண்டும் $\cot^{-1}(2 \tan 2\theta)$ கோணத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

27. $xy = 12a^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P $(3a, 4a)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு மீண்டும் வளைவரையை Q-ல் வெட்டின் $PQ = \dfrac{125a}{12}$ என நிறுவுக.

28. செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P புள்ளியிடத்துத் தொடுவரையும் செங்கோடும் எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளுள் ஒன்றோடு, a_1, a_2, வெட்டுத் துண்டுகளையும் ஏனையதோடு b_1, b_2 வெட்டுத் துண்டுகளையும் பிறப்பிப்பின் $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ என நிறுவுக.

29. செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P புள்ளியிடத்துத் தொடுவரையாலும் வளைவரை ஆயங்களாலும் அமைந்த முக்கோணப் பரப்பு $\triangle_1$, P இடத்துச் செங்கோடும் எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளும் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\triangle_2$, செவ்வக அதிபரவளையத்தின் குறுக்காயம் $2a$ என்றால்

$$\triangle_1^2 \triangle_2 = a^6 \text{ என நிறுவுக.}$$

30. செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P இடத்துத் தொடுவரை, எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளை L, L′ புள்ளிகளிலும், P இடத்துச் செங்கோடு குறுக்காயத்தை G புள்ளியிலும் வெட்டினால் LGL′ செங்கோணம் என நிறுவுக.

31. ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தின் PQ நாண் வளைவரைப் புள்ளி O இடத்துச் செங்கோணத்தைப் பிறப்பித்தால், O இடத்துச் செங்கோடு PQ-க்கு ஒருபோகாக இருக்கும் என நிறுவுக.

32. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் செங்கோட்டு நாண்களின் துணைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை

$(x^2 - y^2)^2 + 4c^2xy = 0$ என நிறுவுக.

33. $xy = c^2$ அதிபரவளையத்து $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ இடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) புள்ளிவழிச் சென்றால் $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = h$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = k$ என நிறுவுக

34. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P_1, P_2, P_3, P_4 இடத்துச் செங்கோடுகள் P வழிச் சென்றால்

$CP^2 = CP_1^2 + CP_2^2 + CP_3^2 + CP_4^2$ என நிறுவுக.

35. P-லிருந்து $xy = c^2$-க்கு வரையும் செங்கோட்டு நீளங்களின் தன் பெருக்கக் கூட்டுத் தொகை 3 CP^2 என நிறுவுக.

36. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்துக்கு ஒரு புள்ளி வழி வரைந்த நான்கு செங்கோட்டடிகளுள் இரண்டிடத்துத் தொடுவரைகள் (ξ_r, η_r), $r = 1, 2 \ldots\ldots\ldots 6$ புள்ளிகளிடத்து வெட்டினால்

$$(1) \quad \sum_{r=1}^{r=6} \left(\frac{\xi_r}{\eta_r}\right) = \sum_{r=1}^{r=6} \left(\frac{\eta_r}{\xi_r}\right) = 0$$

$(2) \quad \xi_1 . \xi_2 \ldots\ldots \xi_6 + \eta_1, \eta_2 \ldots\ldots \eta_6 = 0$ என நிறுவுக.

37. செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P, Q, R புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகளை வளைவரையில் T வழிச் சென்றால், PQR முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் அதிபரவளையத்தின் மையமாகும் என நிறுவுக.

38. $xy = c^2$-ன் P இடத்துச் செங்கோட்டில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வளைவரைக்கு வரைந்த மூன்று செங்கோட்டடிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மைய இயங்குவரை P இடத்துச் செங்கோட்டுக்கு ஒரு போகான அதிபரவளையத்தின் விட்டமென நிறுவுக.

39. செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P_1, P_2, P_3, H புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லும். H வழி P_1, P_2, P_3 இடத்துச் செங்கோடுகளுக்கு ஒருபோகாக வரையும் கோடுகள் மீண்டும் வளைவரையை Q_1, Q_2, Q_3 புள்ளிகளில் வெட்டினால், $Q_1Q_2Q_3$ முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் H என நிறுவுக

40 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, $x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - p' = 0$ கோடுகள் $xy = c^2$-ஐ வட்டப் புள்ளிகளில் வெட்டுதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன ?

41. ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தின் P இடத்துச் செங்கோடு PQ. PQஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் மீண்டும் அதிபரவளையத்தை D'-ல் வெட்டினால் D',P விட்ட எதிர்ப்புள்ளிகள் என நிறுவுக

42. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளையத்தை ஒரு வட்டம் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகளின் பெருக்கத் தொகை c^4 என நிறுவுக.

43. ஒரு வட்டம் செவ்வக அதிபரவளையம் ஒன்றை வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q, R, T என்றால் ஒரு எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரையிலிருந்து இப்புள்ளிகளின் தொலைகளின் பெருக்கத்தொகை ஏனைய எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரையிலிருந்துள்ள தொலைகளின் பெருக்கத் தொகையாகும் என நிறுவுக.

44. ஒரு வட்டம், செவ்வக அதிபரவளையம் ஒன்றை வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q, R, T.

(1) PQ அதிபரவளையத்தின் மையம் வழிச் சென்றால், RT வட்டத்தின் மையம் வழிச் செல்லும் எனவும்,

(2) QRT, RTP, TPQ, PQR, முக்கோணங்களின் செங்கோட்டு மையங்கள் வட்டத்தில் உள எனவும்,

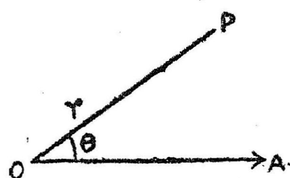
(3) அதிபரவளைய மையத்திலிருந்து PQ, RT-க்கு வரையும் நேர்க்குத்துக் கோடுகள் p, q என்றால் $pq = c^2$ எனவும் நிறுவுக.

9. போலார் துணையெண்கள்

(Polar Co-ordinates)

1. O நிலைப் புள்ளியிலிருந்து P-ன் தொலையான r-ம், O வழிச் செல்லும் OA என்ற நிலைக் கோட்டோடு கூடி OP பிறப்பிக்கும் கோணம் θ-வும் தெரிந்தால் P புள்ளியின் நிலையைக் காணலாம்.

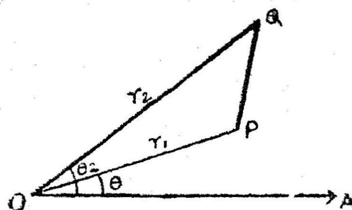
O போல் (Pole) எனவும், OA தொடக்கக்கோடு (Initial Line) எனவும், r ஆரைத்தொலை (Radius Vector) எனவும், θ தொலைக்கோணம் (Vectorial Angle) எனவும், r, θ என்பவை P-ன் போலார் துணையெண்கள் (Polar Co-ordinates) எனவும் கூறப்படும்.



படம் 115

OA-விருந்து இடமாக அளக்கப்படும் θ-வும், O-விருந்து தொலைக்கோண எல்லை ஆரை வழி (Bounding Radius) அளக்கப்படும். r-ம் மிகையாகக் கருதப்படும். எனவே (r, θ)-வும் $(-r, \pi + \theta)$-வும் ஒரே புள்ளியைக் குறிக்கும்.

2. (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டின் நீளம்.



படம் 116

(r_1, θ_1) (r_2, θ_2) புள்ளிகள் P, Q எனக் கொள்வோம்.

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\,OP.\;\; OQ \cos P\hat{O}Q$$

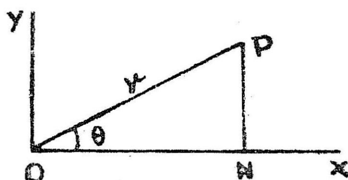
இங்கு $OP = r_1$, $OQ = r_2$, $P\hat{O}Q = Q\hat{O}A - P\hat{O}A$

$$= \theta_2 - \theta_1$$

$$\therefore \quad QP^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

3. போலார் துணையெண்களைக் கார்த்தீசியன் (Cartesian) முறைக்கு மாற்றல்.

குறிப்பு: இதுவரை முன் அத்யாயங்களில் கண்ட ஆயத் தொலைகள் கார்த்தீசியன் ஆயத்தொலைகள் எனப்படும்.



படம் - 117

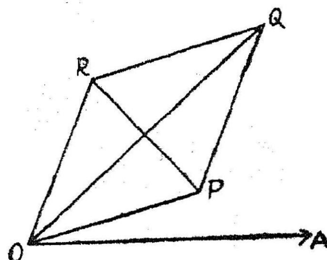
O போல் வழித் தொடக்கக்கோட்டுக்கு OY-ஐ நேர்க்குத்தாக வரைக.

OA தொடக்கக் கோட்டினை x ஆயமாகவும்: OY-ஐ y ஆயமாகவும், P-ன் கார்த்தீசியன் ஆயத்தொலைகளை (x, y) ஆகவும் கொண்டால்

$$x = ON = OP \cos X\hat{O}P = r \cos\theta$$

$$y = NP = OP \sin X\hat{O}P = r \sin\theta.$$

4. ஒரு முக்கோண முனைகளின் போலார் துணையெண்கள் தெரிந்தால் முக்கோணத்தின் பரப்பினைக் காணல்.



படம் 118

P, Q, R புள்ளிகள் (r_1, θ_1), (r_2, θ_2), (r_3, θ_3) எனக் கொள்க.

PQR முக்கோணத்தின் பரப்பு = $\triangle OPQ + \triangle OQR - \triangle OPR$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} OP.\ OQ.\ \sin P\hat{O}Q$$

$$= \frac{1}{2} r_1 .\ r_2 .\ \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\triangle OQR = \frac{1}{2} r_2 .\ r_3 .\ \sin(\theta_3 - \theta_2)$$

$$\triangle OPR = \frac{1}{2} r_3 .\ r_1 .\ \sin(\theta_3 - \theta_1)$$

$$= -\frac{1}{2} r_3 .\ r_1 .\ \sin(\theta_1 - \theta_3)$$

$$\therefore \quad \triangle PQR = \frac{1}{2} \{ r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + r_3 r_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) \}$$

5. ஒரு கோட்டின் போலார் சமன்பாடு.

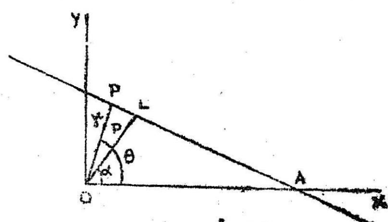
ஆதியிலிருந்து ஒரு கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடு x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் α, நேர் குத்துக்கோட்டின் நீளம் p என்றால், கோட்டின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ எனக் கண்டோம். ஆதியைப் போலாகவும், x— ஆயத்தைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால் கார்த்தீசியன் முறையிலிருந்து போலார் முறைக்கு மாற்ற $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$-ஐ சமன்பாட்டில் ஈடாக்கல் வேண்டும்.

அக் கோட்டின் போலார் சமன்பாடு

$$r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha = p$$

(அ-து) $r \cos(\theta - \alpha) = p$

இச் சமன்பாட்டினை அடியிற் கண்ட வாறும் அறியலாம்



படம்-119

இக் கோட்டு P புள்ளியின் போலார் துணையெண்கள் (r, θ) என்றால்,

$$OP = r, \quad \angle \underline{AOP} = \theta, \quad \angle \underline{LOP} = \theta - \alpha$$

OPL முக்கோணத்தில் $OL = OP \cos LOP$

$$(\text{அ-து}) \quad p = r \cos (\theta - \alpha)$$

6. கார்த்தீசியன் முறைப்படி ஒரு கோட்டின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு $Ax + By + C = 0$

x—ஆயத்தைத் தொடக்கக் கோடாகவும், ஆதியைப் போலாகவும் கொண்டு இச் சமன்பாட்டில் $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$-ஐ ஈடாக்கினால் இக் கோட்டின் போலார் சமன்பாடு வரும். எனவே, கோட்டின் போலார் சமன்பாடு

$$A \cos \theta + B \sin \theta = -\frac{C}{r}.$$

C-ன் மதிப்பு சுன்னமில்லையென்றால் அஃதாவது கோடு ஆதி வழிச் செல்லாதிருப்பின் இச் சமன்பாட்டை $-\frac{k}{C}$-ஆல் பெருக்கவே

$$\frac{k}{r} = -\frac{kA}{C} \cos \theta - \frac{kB}{C} \sin \theta$$

$$= A' \cos \theta + B' \sin \theta \text{ வரும்.}$$

எனவே, போல் வழிச் செல்லாக் கோட்டின் பொதுப்படைப் போலார் சமன்பாடு

$$A \cos \theta + B \sin \theta = \frac{k}{r}$$

போல் வழிச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\theta = \text{நிலையெண்}$$

7. ஒருபோகான கோடுகள்

$p = r \cos (\theta - \alpha)$

$p_1 = r \cos (\theta - \alpha)$ கோடுகள் ஒருபோகானவை என எளிதிற் காணலாம்.

இதனுல், $\frac{k}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$

$\frac{k'}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$ கோடுகளும் ஒரு போகானவை எனக் காணலாம்.

$\frac{k}{r} = A\cos\theta + B \sin\theta$-க்கு ஒருபோகான கோடுகளின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு k நிலையெண்ணை மாற்றினுற் கிடைக்கும்.

8. நேர்குத்தான கோடுகள்

$Ax + By + C = 0.$

$Bx - Ay + C_1 = 0$ கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தானவை. இவற்றைப் போலார் முறைக்கு மாற்றினுல்

$$\frac{k}{r} = A\cos\theta + + B\sin\theta$$

$$\frac{k'}{r} = B\cos\theta - A\sin\theta$$

கோடுகள் தம்முள் நேர்க்குத்தானவை எனக் காணலாம்.

எனவே, $\frac{k}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ கோட்டுக்கு நேர்க்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு காண இச் சமன்பாட்டில் நிலையெண் k-க்குப் பதில் வேறொரு நிலையெண்ணையும் θ-க்குப் பதில் $\theta + \frac{\pi}{2}$-ஐயும் எழுதவேண்டும்.

ஆகவே, நேர்க்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{k'}{r} = A\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + B\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

இம் மாதிரியே $p = r\cos(\theta - \alpha)$-க்கு நேர்க்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு $p' = r\cos\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு.

$$\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \qquad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

$A = k\cos\alpha$, $B = k\sin\alpha$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{l}{k} = r\cos(\theta - \alpha) \qquad ...(2)$$

எனவே, போலிலிருந்து இக் கோட்டுக்கு வரையும் நேர்க்குத்துக் கோடு தொடக்கக் கோட்டோடு α கோணம் சாய்ந்திருக்கும்.

வேறொரு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l'}{r} = A'\cos\theta + B'\sin\theta \qquad ...(3)$$

எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $A' = k'\cos\alpha'$, $B' = k'\sin\alpha'$ எனக்கொண்டால் இக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l'}{k'} = r\cos(\theta - \alpha') \qquad ...(4)$$

(1), (3) கோடுகள் தம்முள் நேர்க்குத்தாவதற்கு அவற்றிற்கு போலிருந்து வரையும் நேர்க்குத்துக் கோடுகளிடைப்பட்ட கோணம் 90° ஆக இருத்தல் வேண்டும்

(அ-து) $\alpha \sim \alpha' = \frac{\pi}{2}$

(அ-து) $\cos(\alpha \sim \alpha') = 0$

(அ-து) $\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha' = 0$

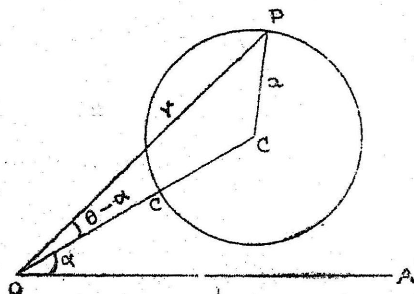
(அ-து) $\frac{A}{k}\cdot\frac{A'}{k'} + \frac{B}{k}\cdot\frac{B'}{k'} = 0$

(அ-து) $AA' + BB' = 0.$

எனவே, $AA' + BB' = 0$ என்றால் $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$,

$\frac{l'}{r} = A'\cos\theta + B'\sin\theta$

கோடுகள் தம்முள் நேர்க்குத்தானவை.



படம்–120

9. வட்டத்தின் போலார் சமன்பாடு. வட்டத்தின் மையம் (c, α) எனவும், ஆரை a எனவும், வட்டப் புள்ளி P-ன் துணையெண்கள் (r, θ) எனவும் கொள்க.

$CP^2 = OC^2 + OP^2 - 2OC.OP. \cos COP$

$CP = a, OC = c, OP = r, \angle AOC = \alpha, \angle AOP = \theta.$

$$\therefore a^2 = c^2 + r^2 - 2rc\cos(\theta - \alpha) \quad ...(1)$$

போல் வட்டவரையில் இருப்பின் $c = a$

இந்நிலையில் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ra\cos(\theta - \alpha)$$

(அ-து) $r^2 = 2ra\cos(\theta - \alpha)$

(அ-து) $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$ ...(2)

போல் வட்டவரையிலும், தொடக்கக்கோடு வட்டத்தின் விட்டமாகவும் இருப்பின் $\alpha = 0$.

இந் நிலையில் வட்டத்தின் சமன்பாடு $r = 2a\cos\theta$ ...(3)

10. $r = 2a\cos\theta$ வட்டத்தில் θ_1, θ_2 தொலைக்கோணங்களுடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு.

போலார் முறையில் ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு

$$p = r\cos(\theta - \alpha)$$

இக் கோடு $(2a\cos\theta_1, \theta_1)$, $(2a\cos\theta_2, \theta_2)$ புள்ளிகள்வழிச் சென்றால்

$$p = 2a\cos\theta_1\cos(\theta_1 - \alpha) \quad ..(2)$$

$$p = 2a\cos\theta_2\cos(\theta_2 - \alpha) \quad ...(3)$$

$$\therefore \cos\theta_1\cos(\theta_1 - \alpha) = \cos\theta_2 . \cos(\theta_2 - \alpha)$$

(அ-து) $\cos(2\theta_1 - \alpha) + \cos\alpha = \cos(2\theta_2 - \alpha) + \cos\alpha$

(அ-து) $\cos(2\theta_1 - \alpha) = \cos(2\theta_2 - \alpha)$

(அ-து) $2\theta_1 - \alpha = \pm(2\theta_2 - \alpha)$

$\theta_1 \neq \theta_2$ ஆகையால் $2\theta_1 - \alpha = -(2\theta_2 - \alpha)$

எனவே, $\alpha = \theta_1 + \theta_2$. ...(4)

(2) ஆல் $p = 2a\cos\theta_1 . \cos\theta_2$ ...(5)

(4), (5)-ஐ(1)-ல் கூட்டாக்கினுல் நாணின் சமன்பாடு

$$2a\cos\theta_1 . \cos\theta_2 = r\cos(\theta - \theta_1 - \theta_2)$$

α இடத்துத் தொடுவரையைக் காண $\theta_1 = \theta_2 = \alpha$ என்று கொள்ள வேண்டும்.

α இடத்துத் தொடுவரை $r\cos(\theta - 2\alpha) = 2a\cos^2\alpha$

மாதிரி 1

ABC முக்கோண சுற்று வட்டப்புள்ளி O-விருந்து முக்கோணப் பக்கங்களுக்கு வரையும் நேர்க்குத்துக் கோட்டு அடிகள் ஒரே கோட்டில் இருப்பன என நிறுவுக.

O புள்ளியைப் போலாகவும் O வழி விட்டத்தினைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால் வட்டத்தின் சமன்பாடு $r = 2a\cos\theta$.

A, B, C-யின் தொலைக் கோணங்களை நிரலே α, β, γ எனக் கொள்க.

BC கோடு $(2a\cos\beta, \beta)$, $(2a\cos\gamma, \gamma)$ புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடாகும்.

எனவே அதன் சமன்பாடு

$$2a\cos\beta\cos\gamma = r\cos(\theta - \beta - \gamma) \qquad ...(1)$$

CA, AB கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$2a\cos\gamma\cos\alpha = r\cos(\theta - \gamma - \alpha) \qquad (2)$$

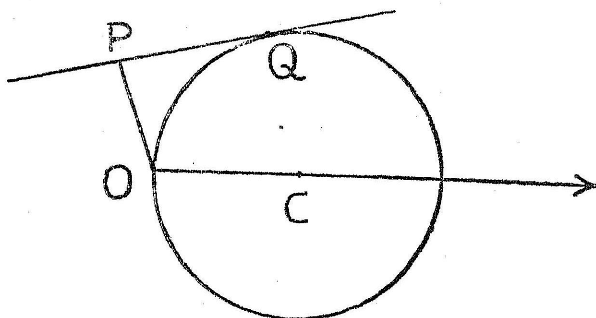
$$2a\cos\alpha\cos\beta = r\cos(\theta - \alpha - \beta) \qquad (3)$$

எனவே, O-விருந்து (1), (2), (3) கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டடிகள் நிரலே $(2a\cos\beta\cos\gamma, \beta + \gamma)$ $(2a\cos\gamma\cos\alpha, \gamma + \alpha)$, $(2a\cos\alpha\cos\beta, \alpha + \beta)$ ஆகும். இப் புள்ளிகள் $2a\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = r\cos(\theta - \alpha - \beta - \gamma)$ கோட்டில் உளவென எளிதிற் காணலாம்.

மாதிரி 2.

$r = 2a\cos\theta$ வட்டத் தொடுவரைகளுக்குப் போலிலிருந்து வரையும் நேர்க்குத்துக் கோட்டடிகளின் இயங்குவரை என்ன?

QP, வட்டத்தின் Q இடத்துத் தொடுவரை என்றும், OP போலிலிருந்து QP-க்கு வரையும் நேர்க்குத்துக் கோடு என்றும் (ρ, α) (r_1, θ_1) நிரலே Q, P புள்ளிகளின் துணையெண்கள் என்றும் கொள்க.



படம்-121

வட்டத்தின் (p, α) இடத்துத் தொடுவரை
$r \cos(\theta - 2\alpha) = 2a \cos^2 \alpha$.
தொடுவரைச் சமன்பாட்டிலுல்
$OP = 2a \cos^2 \alpha$ என்றும், $\theta_1 = 2\alpha$ என்றும் காணலாம்.

$\therefore r_1 = 2a \cos^2 \alpha$ ...(1)

$\alpha = \frac{\theta_1}{2}$ ...(2)

(2)-ஐ (1)-ல் கடாக்கினுல் $r_1 = 2a \cos^2 \frac{\theta_1}{2}$

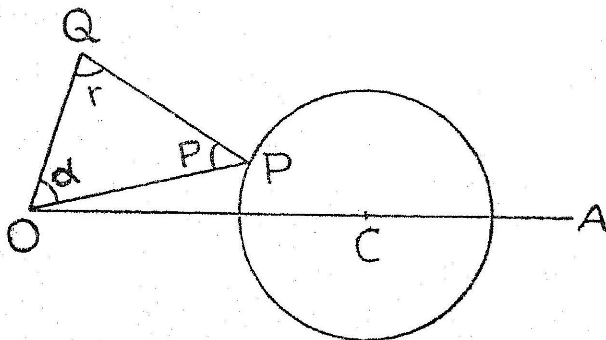
$= a(1 + \cos \theta_1)$.

$\therefore$ (r_1, θ_1)-ன் இயங்குவரை $r = a(1 + \cos \theta)$.

இவ் வளைவரை நெஞ்சுவளை (Cardioid) ஆகும்.

மாதிரி 3

குறித்த கோணங்களுடைய ஒரு முக்கோண முனைகளுள் ஒன்று நிலைப் புள்ளியாக மற்றொன்று ஒரு குறித்த வட்டத்தில் இயங்கினுல் எஞ்சிய முனையின் இயங்குவரை என்ன?



படம்-122

நிலைத்த முனை O-ஐப் போலாகவும், போலையும் குறித்த வட்டத்தின் மையம் C-ஐயும் இணைக்கும் கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும், R-ஐ வட்டத்தின் ஆரையாகவும் OC-ஐ c ஆகவும் முக்கோணத்தின் கோணங்களை α, β, γ ஆகவும் கொள்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $r^2 - 2rc\cos\theta + c^2 = R^2$ ...(1) முக்கோணத்தின் ஒரு நிலை O P Q எனவும், P, Q புள்ளிகளின் துணையெண்கள் நிரலே (ρ, ϕ), (r_1, θ_1) எனவும் கொள்க.

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \text{நிலையெண்} = k$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{\rho}{r_1} = k$$

$$\therefore \quad \rho = kr_1$$

$$\phi = \theta_1 - \alpha$$

P-ன் துணையெண்கள் (1) சமன்பாட்டைப் பொருந்தும்,
அச் சமன்பாட்டில் $r = kr_1$, $\theta = \theta_1 - \alpha$-ஐ ஈடாக்கினால்,
$k^2 r_1^2 - 2kr_1 c\cos(\theta_1 - \alpha) + c^2 = R^2$ என்று வரும்.
$\therefore$ (r_1, θ_1)-ன் இயங்குவரை, அஃதாவது Q-ன் இயங்குவரை
$k^2 r^2 - 2k\,r\,c\cos(\theta - \alpha) + c^2 = R^2$ வட்டமாகும்.

மாதிரி 4

$r^2 - kr\cos(\theta - \alpha) + kd = 0$ சமன்பாடு k வேறுபடும்பொழுது பொதுவாயமுடைய ஒரு நிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. இவ் வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகளின் போலார் துணையெண்களையும், சமதொடுவரையாயத்தின் போலார் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

இந் நிலை வட்டங்களின் இரு வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$r^2 - k_1 r\cos(\theta - \alpha) + k_1 d = 0.$$

$$r^2 - k_2 r\cos(\theta - \alpha) + k_2 d = 0.$$

$$\{r^2 - k_1 r\cos(\theta - \alpha) + k_1 d\}$$

$$- \quad \{r^2 - k_2 r\cos(\theta - \alpha) + k_2 d\} = 0 \quad \text{சமன்பாடு}$$

$$(\text{அ-து}) \quad (k_1 - k_2)\ \{r\cos(\theta - \alpha) - d\} = 0$$

(அ-து) $r\cos(\theta - \alpha) - d = 0$ இவ் வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு கோட்டைக் குறிக்கும்.

இக் கோடு இவ்வட்டங்களின் சமதொடுவரை ஆயமாகும். இக் கோட்டின் சமன்பாட்டில் k_1, k_2 இல்லாமையால், இந் நிலை வட்டங்களின் ஏதாவது இரு வட்டங்கள் எடுத்தால் அவற்றிற்கு இக் கோடு சமதொடுவரை ஆயமாகும். எனவே, இவ் வட்டங்கள் பொதுவாயமுடைய வட்டங்களாகும்.

இவ் வட்டங்களின் சமன்பாட்டை

$$r^2 - kr\cos(\theta - \alpha) + \tfrac{1}{4}k^2 = \tfrac{1}{4}k^2 - kd$$

என்று எழுதலாம்.

∴ இவ் வட்டத்தின் ஆரை $\sqrt{\tfrac{1}{4}k^2 - kd}$, மையம் $(\tfrac{1}{2}k, \alpha)$

இவ் வட்டம் புள்ளி வட்டமாயின்

$$\tfrac{1}{4}k^2 - kd = 0$$

(அ-து) $k = 0$ அல்லது $4d$.

∴ புள்ளி வட்டங்களின் மையங்கள்

$$(0, \alpha), (2d, \alpha).$$

∴ எல்லைப் புள்ளிகள் $(0, \alpha)$, $(2d, \alpha)$ ஆகும்.

(1.) போலினை உயிர்ப் புள்ளியாகக் கொண்ட கூம்புவெட்டியின் போலார் சமன்பாடு.

கூம்புவெட்டியின் உயிர்ப்புள்ளி S, உயிர்க்கோடு ZM, மையத் தொலைத்தகவு e, நேரகலத்தின் நீளம் $2l$ எனக் கொள்க.

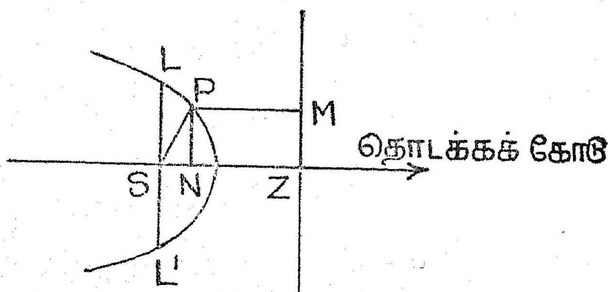
உயிர்க் கோட்டுக்கு SZ-ஐ நேர்குத்தாக வரைக

LSL′-ஐ நேரகலமாகக் கொண்டால்,

$$SL = e.\,SZ$$

(அ-து) $l = e.\,SZ$

$$\therefore\ SZ = \frac{l}{e}$$



படம்-123

கூம்புவெட்டிப் புள்ளி P-யின் துணையெண்கள் (r, θ) எனவும், உயிர்க்கோட்டுக்கும் SZ-க்கும் P-யிலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக்கோடுகளை நிரலே PM, PN எனவும் கொள்க.

$$SP = e.\, PM$$
$$= e.\, NZ$$
$$= e\,(SZ - SN)$$
$$= e.\left(\frac{l}{e} - SP\cos\theta\right)$$
$$\therefore \quad r = l - e\,r\cos\theta$$
$$(\text{அ-து}) \quad r\,(1 + e\cos\theta) = l.$$
$$(\text{அ-து}) \quad \frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$$

கிளைத் தேற்றம் : கூம்புவெட்டியின் ஆயம் தொடக்கக் கோட்டோடு α கோணம் சாய்ந்திருப்பின் SP, SZ ஒடு $\theta - \alpha$ கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும்.

எனவே, கூம்புவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \alpha)$$

12. உயிர்க்கோடு ZM. உயிர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண, அதிலிருக்கும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (r, θ) எனக்கொள்க.

$$r\cos\theta = SZ = \frac{l}{e}$$

எனவே, S-ன் ஒத்த உயிர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta.$$

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \alpha)$-ன் உயிர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos(\theta - \alpha).$$

13. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$ கூம்பு வெட்டியின் வளைவரை வரைதல்.

வகை 1. $e = 0$ எனக் கொண்டால் $r = l$
(அ-து) $r =$ நிலையெண்

எனவே, இவ்வளை வரை போலை மையமாகவும் l-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒருவட்டமாகும்.

வகை 2. $0 < e < 1$.

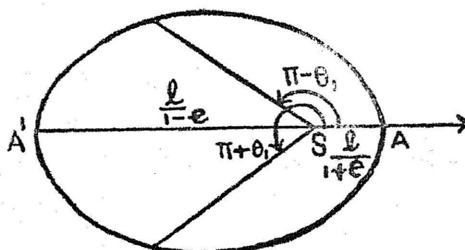
$$\theta = 0 \text{ என்றால், } r = \frac{l}{1+e}$$

$\cos\theta$-வின் மீப்பெருமதிப்பு 1 ஆகையால் $\frac{l}{r}$-ன் மீப்பெருமதிப்பு $1 + e$.

$\therefore$ r-ன்மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{l}{1-e}$.

$\theta = \pi$ என்றால் $r = \frac{l}{1-e}$.

0-லிருந்து π-க்கு θ கூடுகையில், r-ன் மதிப்புக் கூடிவந்து $\theta = \pi$ என்றிருக்கையில் $\frac{l}{1-e}$ மீப்பெருமதிப்பை அடையும்.



படம்-124

$\theta = \frac{\pi}{2}$ என்றால் r-ன்மதிப்பு l

$\cos(\pi + \theta_1) = \cos(\pi - \theta_1)$.

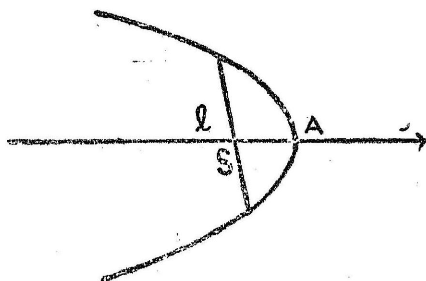
எனவே, θ-வின் $\pi + \theta_1$, $\pi - \theta_1$ மதிப்புகளுக்குத்தக r-க்கு ஒரே மதிப்புக் கிடைப்பதால் தொடக்கக் கோட்டோடு சமச்சீருடையதாகும்.

$e < 1$ ஆகையால் இவ் வளைவரை ஒரு நீள்வட்டமாகும். அதன் உருவத்தை இப்படத்தில் காண்க.

வகை 3. $e = 1$ என்றால் கூம்புவெட்டி பரவளையமாகும்.

அதன் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$.

$\theta = 0$ என்றால், $r = \frac{1}{2} l$. இது r-ன் மீச் சிறு மதிப்பாகும்.



படம்-125

θ-வின் மதிப்புக் கூடும்பொழுது r-ன் மதிப்பும் கூடும்.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ என்றால் $r = l$

θ, π மதிப்பை நெருங்கும்பொழுது r-ன் மதிப்பு எண்ணிலியை நெருங்கும்.

வளைவரை (வகை 2-ஐப் போல்) தொடக்கக் கோட்டோடு சமச்சீருடையதாகும்.

வகை 4. $e > 1$ என்றால், கூம்புவெட்டி அதிபரவளைய மாகும். θ-வின் $\frac{\pi}{2}$, π இம் மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு மதிப்புக்கு $1 + e \cos\theta$-ன் மதிப்பு சுன்னமாகும்.

அம் மதிப்பை α எனக் கொண்டால்

$$1 + e\cos\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{e}$$

$\theta = 0$ என்றால் $r = \frac{l}{1+e}$

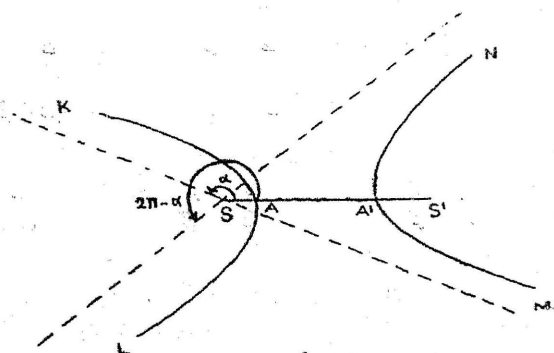
θ-வின் மதிப்பு சுன்னத்திலிருந்து α-க்குக் கூடும்பொழுது r-ன் மதிப்பு $\frac{l}{1+e}$ லிருந்து எண்ணிலிருக்குக் கூடும் எனவே, θ-வின் இம்மதிப்புகளுக்குச் இச் சமன்பாடு குறிப்பிடும் பகுதி A K. இங்கு K, A-லிருந்து எண்ணிலித் தொலையில் இருக்கும். θ-வின் மதிப்பு α வை விடக் கூடுதலாயின் r-ன் மதிப்புக் குறையாகும். α-லிருந்து π-க்கு θ-வின் மதிப்புக் கூடுகையில் r-ன் மதிப்புக் குறையாகவும் எண்ணளவில் குறைந்துகொண்டும் வரும்.

$$\theta = \pi \text{ என்றால் } r = -\frac{l}{-e\ 1}$$

எனவே, θ-வின் இம்மதிப்புகளுக்குந்தக படத்தின் MA' பகுதி கிடைக்கும்.

π, 2π மதிப்புகளுக்கிடைப்பட்ட θ-வின் மதிப்புகளுக்குத்தக வளைவரையின் பகுதியைச் சமச்சீரினால் வரையலாம்.

π-லிருந்து $2\pi - \alpha$-க்கு θ-வின் மதிப்புக் கூடும்பொழுது A'N பகுதியும், 2π-α-லிருந்து 2πக்கு θ வின் மதிப்புக் கூடும் பொழுது L A பகுதியும் கிடைக்கும். இங்கு L, M, N புள்ளிகள் A, A' புள்ளிகளிலிருந்து எண்ணிலித்தொலையில் இருக்கும்.



படம்–126

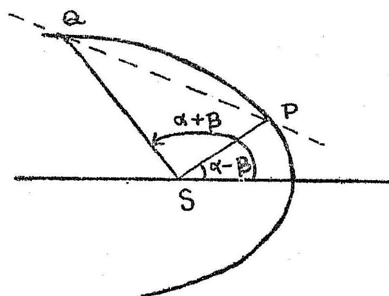
செவ்வக அதிபரவளையத்தின் $e = \sqrt{2}$

$\therefore$ அதன் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + \sqrt{2}\cos\theta$.

√14. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$-ன் $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ தொலைக் கோணங்களுடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு.

போல்வழிச் செல்லாக்கோட்டின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \quad \ldots (1)$$



படம்-127

$a - \beta$, $a + \beta$ தொலைக் கோணங்களுடைய புள்ளிகளை P, Q எனக் கொள்வோம்.

P, Q புள்ளிகள் $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$-ல் இருப்பதால்

$$\frac{l}{SP} = 1 + e\cos(\alpha - \beta) \quad \ldots (3)$$

$$\frac{l}{SQ} = 1 + e\cos(\alpha + \beta) \quad \ldots (2)$$

P, Q புள்ளிகள் (1) கோட்டில் இருப்பதால்

$$\frac{l}{SP} = A\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha - \beta) \quad \ldots (4)$$

$$\frac{r}{SQ} = A\cos(\alpha + \beta) + B\sin(\alpha + \beta) \quad \ldots (5)$$

(2), (3), (4) (5) சமன்பாடுகளால்

$$1 + e\cos(\alpha - \beta) = A\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha - \beta)$$
$$1 + e\cos(\alpha + \beta) = A\cos(\alpha + \beta) + B\sin(\alpha + \beta).$$

(அ-து) $(A - e)\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha - \beta) = 1$

$$(A - e)\cos(\alpha + \beta) + B\sin(\alpha \overline{\ \ } \beta) = 1$$

இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் A, B-ன் மதிப்புகள் வரும்.

$(A - e)\sin(\alpha + \beta - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

$\therefore \quad 2(A - e)\sin\beta\cos\beta = 2\cos\alpha\sin\beta$

$\therefore \quad A = e + \cos\alpha\sec\beta$

$B\sin 2\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

$\therefore \quad B = \sin\alpha \sec\beta.$

∴ நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = (e + \cos\alpha \sec\beta)\cos\theta + \sin\alpha \sec\beta \sin\theta$$

(அ-து) $\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\beta \cos(\theta - \alpha)$ ...(7)

$\beta = 0$ என்றால் P, Q புள்ளிகள் ஒன்றுபடும். அந்நிலையில் P-ன் தொலைக்கோணம் α ; P இடத்துத் தொடுவரை P Q.

∴ α இடத்துத் தொடுவரை காண P Q-வின் சமன்பாட்டில் $\beta = 0$-ஐ ஈடாக்கல் வேண்டும்.

∴ α இடத்துத் தொடுவரை $\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$ ...(8)

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \gamma)$ கூம்புவெட்டிக்கு α இடத்துத் தொடுவரை காண (8) தொடுவரைச் சமன்பாட்டில் α, θ-க்குப் பதில் நிரலே $\alpha - \gamma$, $\theta - \gamma$-ஐ ஈடாக்கல் வேண்டும். எனவே α இடத்துத் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos(\theta - \gamma) + \cos(\theta - \gamma - \overline{\alpha - \gamma})$$

(அ-து) $\frac{l}{r} = e\cos(\theta - \gamma) + \cos(\theta - \alpha)$

மாதிரி 5.

செவ்வக அதிபரவளைய உயிர்ப்புள்ளிகளுள் ஒன்றோடு செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் அதிபரவளைய நாண்கள் ஒரு நிலைத்த பரவளையத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

P'

P

90°

S

படம்-128

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + \sqrt{2} \cos \theta$ எனவும், S-ஓடு செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் ஒரு நாண் PP' எனவும் கொள்க.

P, P'-ன் தொலைக் கோணங்களை நிரலே $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ எனக் கொண்டால் $P'\hat{S}P = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)$

$$= 2\beta$$

$$\therefore \quad 2\beta = 90^\circ$$

$$\therefore \quad \beta = 45^\circ$$

PP'-ன் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = \sqrt{2} \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha)$

$\beta = 45^\circ$-ஐ இங்கு ஈடாக்கினுல் PP'-ன் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = \sqrt{2} \cos \theta + \sec 45^\circ \cos (\theta - \alpha)$$

$$(\text{அது}) \quad \frac{l}{\sqrt{2}\, r} = \cos \theta + \cos (\theta - \alpha)$$

இக் கோடு $\frac{l}{\sqrt{2}\, r} = 1 + \cos \theta$ வளைவரையை α இடத்துத் தொடும்.

$\frac{l}{\sqrt{2} r} = 1 + \cos \theta$ வளைவரை போலை உயிர்ப்புள்ளியாகவும் தொடக்கக் கோட்டை ஆயமாகவும் கொண்ட ஒரு பரவளையமாகும்.

இப் பரவளைத்தின் நேரகல நீளம் $= \frac{2l}{\sqrt{2}} = l\sqrt{2}$

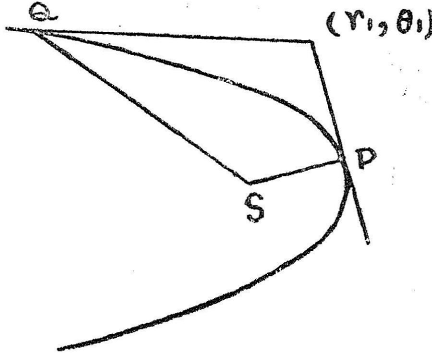
மாதிரி 6

உயிர்ப்புள்ளிகளுள் ஒன்றோடு ஒரு நிலைக் கோணம் பிறப்பிக்கும் கூம்புவெட்டி நாண்களின் துணைப் புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை என்ன ?

கூம்புவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots (1)$$

எனக் கொள்க.



படம்-129

P, Q புள்ளிகளின் தொலைக்கோணங்களை $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ எனக் கொண்டால்

$\hat{QSP} = 2\beta =$ நிலைக்கோணம் 2 K.

$\therefore \quad \beta = K$

P இடத்துத் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha + \beta)$$

Q இடத்துத் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha - \beta)$$

P, Q இடத்துத் தொடுவரைகள் (r_1, θ_1)-ல் வெட்டினால்

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos (\theta_1 - \alpha + \beta) \quad \dots (2)$$

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos (\theta_1 - \alpha - \beta) \quad \dots (3)$$

(3), (2)-லிருந்து

$\cos (\theta_1 - \alpha + \beta) = \cos (\theta_1 - \alpha - \beta)$

$\therefore \theta_1 - \alpha + \beta = \pm (\theta_1 - \alpha - \beta)$

$+$ குறியை எடுத்துக்கொண்டால் α, β கோணங்களுக்கு இடையே ஒரு தொடர்பு வந்துவிடுவதால் அக் குறியை எடுக்க வேண்டாம்.

$$\therefore \quad \theta_1 - \alpha + \beta = -(\theta_1 - \alpha - \beta)$$

$$\therefore \quad 2\theta_1 = 2\alpha$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \alpha.$$

இம் மதிப்பை (2)-ல் ஈடாக்கினல்

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos \beta.$$

(அ-து) $\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos K$

$\therefore$ (r_1, θ_1)-ன் இயங்குவரை $\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos K.$

(அ-து) $\frac{l \sec K}{r} = 1 + e \sec K.\cos \theta.$

$l \sec K = L$, $e \sec K = E$ என்றால்,

$$\frac{L}{r} = 1 + E \cos \theta. \qquad \ldots(4)$$

இது போலே உயிர்ப்புள்ளியாகவும், தொடக்கக் கோட்டை ஆயமாகவும் கொண்ட கூம்பு வெட்டியாகும்.

இதன் உயிர்க்கோடு $\frac{L}{r} = E \cos \theta$

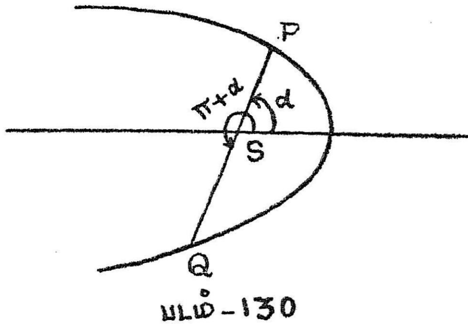
(அ-து) $\frac{l \sec K}{r} = e \sec K.\cos \theta.$

(அ-து) $\frac{l}{r} = e \cos \theta.$

இக் கோடு (1) கூம்பு வெட்டியின் உயிர்க்கோடாகும். எனவே (1), (4) கூம்பு வெட்டிகளுக்கு ஒரு பொது உயிர்ப் புள்ளியும், ஒரு பொது உயிர்க்கோடும் உண்டு.

15. கூம்பு வெட்டியின் சில பண்புகள்

(1) PQ உயிர்ப்புள்ளிவழி நாண் என்றால் SP, SL, SQ இசைத் தொடர் (Harmonic Progression) ஆகும்.



படம் -130

P-ன் தொலைக் கோணத்தை α எனக் கொண்டால் Q-ன் தொலைக் கோணம் $\pi+\alpha$.

கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ எனக்கொள்க.

P-ன் துணையெண்கள் (SP, α)

Q-ன் துணையெண்கள் (SQ, $\pi+\alpha$)

P, Q புள்ளிகள் கூம்பு வெட்டியில் இருப்பதால்

$$\frac{l}{SP} = 1 + e\cos\alpha \qquad ...(1)$$

$$\frac{l}{SQ} = 1 + e\cos(\pi+\alpha) = 1 - e\cos\alpha \qquad ...(2)$$

(1)-யும், (2)-யும் கூட்டினால் $\frac{l}{SP} + \frac{l}{SQ} = 2$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{2}{SL}$$

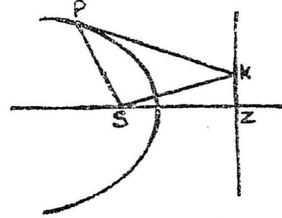
$\therefore$ SP, SL, SQ இசைத் தொடராகும்.

(2) ஒரு கூம்பு வெட்டியின் P இடத்துத் தொடுவரை உயிர்க் கோட்டினை K-ல் வெட்டினால் $\angle$ KSP ஒரு செங்கோண மாகும்.

கூம்புவெட்டியின் சமன்பாட்டினை

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ எனவும்

P-ன் தொலைக் கோணத்தை α எனவும் கொண்டால் உயிர்ப்புள்ளி S போல் ஆகும்.



படம் 131

P இடத்துத் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \quad \dots (1)$$

உயிர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta \quad \dots (2)$$

(1), (2) கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி K இடத்து

$$e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) = e \cos \theta$$

$$\therefore \cos (\theta - \alpha) = 0$$

$$(\text{அ-து})\ \theta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \text{K இடத்து } \theta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$$

$$Z\hat{S}P = \alpha,\ Z\hat{S}K = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$$

$$K\hat{S}P = Z\hat{S}P - Z\hat{S}K$$

$$= \alpha - (\alpha \pm \frac{\pi}{2})$$

$$= \pm \frac{\pi}{2}$$

(3) ஒரு கூம்பு வெட்டியின் P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடு வரைகள் T இடத்து வெட்டினால்

(a) PSQ கோணத்தை ST சமமாகப் பிரிக்கும்.

(*b*) PQ உயிர்கோட்டினை K-ல் வெட்டினால் $\hat{TSK} = 90^\circ$

(*c*) கூம்பு வெட்டி பரவளையமென்றால்

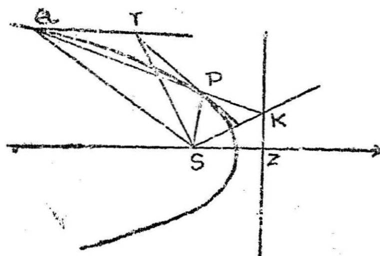
$$ST^2 = SP.SQ.$$

P, Q புள்ளிகளின் தொலைக் கோணங்கள் α, β எனக் கொள்க.

P, Q இடத்துத் தொடுவரைகள் நிரலே

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha)$$

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \beta)$$



படம்-132

இத்தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியிடத்து

$$\cos (\theta - \alpha) = \cos (\theta - \beta)$$

$$\therefore \theta - \alpha = \pm (\theta - \beta)$$

+ குறியை எடுத்துக்கொண்டால் $\theta - \alpha = \theta - \beta$

$$\therefore \alpha = \beta$$

P, Q புள்ளிகளை வெவ்வேறு புள்ளிகளாகக் கொண்டதால் $\alpha = \beta$ என வராது.

$\therefore$ + குறி எடுக்கத்தக்கதன்று.

— குறியை எடுத்துக்கொண்டால் $\theta - \alpha = -(\theta - \beta)$

$$\therefore \theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

(*a*) $\hat{PSZ} = \alpha$, $\hat{TSZ} = \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$\therefore \quad \hat{TSP} = \frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\hat{QSZ} = \beta. \qquad \hat{TSZ} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\therefore \quad \hat{QST} = \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\therefore \quad \hat{TSP} = \hat{QST}.$$

$\therefore$ ST, QSP கோணத்தைச் சமமாகப் பிரிக்கும்.

(*b*) உயிர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = e \cos \theta$

PQ-ன் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} . \ \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$\therefore$ K இடத்து

$$e \cos \theta = e \cos \theta + \sec \frac{\alpha - \beta}{2} . \ \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\therefore \quad \cos \left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 0$$

$$\therefore \quad \theta - \frac{\alpha + \beta}{2} = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \hat{KSZ} = \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \hat{TSK} = \hat{TSZ} - \hat{KSZ}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \pm \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \pm \frac{\pi}{2}.$$

(*c*) PT-ன் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha)$

இங்கு $\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$-ஐ ஈடாக்கினால் ST-ன் நீளம் காணலாம்.

$$\therefore \quad \frac{l}{ST} = e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right)$$

$$= e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\therefore \quad ST = \frac{l}{e \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\beta-\alpha}{2}}$$

கூம்புவெட்டி பரவளையமென்றால் $e = 1$

$$\therefore \quad ST = \frac{l}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$= \frac{l}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{l}{SP} = 1 + \cos \alpha, \; \frac{l}{SQ} = 1 + \cos \beta$$

$$\therefore SP = \frac{l}{1 + \cos \alpha} = \frac{l}{2 \cos^2 \alpha/2}$$

$$SQ = \frac{l}{1 + \cos \beta} = \frac{l}{2 \cos^2 \beta/2}$$

$$\therefore \quad SP. \, SQ = \frac{l}{4 \cos^2 \alpha/2 \, \cos^2 \beta/2} = ST^2.$$

(4) உயிர்ப் புள்ளிகளுள் ஒன்றிலிருந்து கூம்புவெட்டித் தொடுவரைகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் தம் இயங்குவரை ஒருவட்டமாகும்.

கூம்புவெட்டியின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ எனக் கொண்டால் α தொலைக் கோணமுடைய புள்ளியிடத்துத் தொடு வரைச் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \qquad ...(1)$$

இக் கோட்டுக்கு நேர்க்குத்தாகப் போல் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$0 = e \sin \theta + \sin (\theta - \alpha) \qquad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து α-வை அகற்றினால் இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை தோன்றும்.

$\therefore$ அவ் வியங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{l}{r} - e \cos \theta\right)^2 + e^2 \sin^2 \theta = 1$$

(அ-து) $r^2(1-e^2)+2\,ler\cos\theta-l^2=0$
இது ஒரு வட்டமாகும்.

நீள்வட்டத்துக்கு $l=a(1-e^2)$
எனவே, இச் சமன்பாட்டினை $r^2+2\,aer\cos\theta+a^2e^2=a^2$ என்று எழுதலாம்.

∴ இவ் வட்டத்தின் மையம், நீள்வட்டத்தின் மையம், (ae, π) ஆரை a.

பரவளையத்துக்கு $e=1$

∴ இச் சமன்பாட்டில் $e=1$-ஐ ஈடாக்கினல்
$2\,lr\cos\theta-l^2=0$ என்று வரும்.

(அ-து) $\frac{l}{r}=2\cos\theta$.

இது பரவளையத்தின் முனையிடத்துத் தொடுவரையாகும். எனவே, பரவளையத்தொடுவரைக்கு உயிர்ப்புள்ளியிலிருந்து வரையும் நேர்க்குத்துக் கோடு அடி பரவளையத்தின் முனையிடத்துத் தொடுவரையில் இருக்கும்.

16. $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$-ன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள்.

α இடத்துத் தொடுவரை $\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$ ...(1).

α தொலைக் கோணமுடைய புள்ளி வளைவரைக்கண் எட்டாவரையில் (Line at Infinity) இருந்தால்

$$0=1+e\cos\alpha \qquad ...(2).$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து α-வை அகற்றினல் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் கிடைக்கும்.

$$\cos\alpha=-\frac{1}{e}$$

(1) சமன்பாட்டை விரித்து எழுதினல்

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$$

(அ-து) $\frac{l}{r}=\cos\theta(e+\cos\alpha)+\sin\theta\sin\alpha$

$$=\cos\theta(e+\cos\alpha)\pm\sin\theta\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$\cos\alpha = -\frac{1}{e}$-ஐ ஈங்கு ஈடாக்கினுல்

$$\frac{l}{r} = \cos\theta\left(e - \frac{1}{e}\right) \pm \sin\theta\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$$

$$= \frac{e^2 - 1}{e}\cos\theta \pm \sqrt{\frac{e^2 - 1}{e^2}}\sin\theta$$

$$= \frac{e^2 - 1}{e}\left\{\cos\theta \pm \frac{\sin\theta}{\sqrt{e^2 - 1}}\right\}$$

17. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$-ன் உயிர்வட்டம்

$$r^2(1 - e^2) + 2\,elr\cos\theta - 2l^2 = 0.$$

தம்முள் நேர்குத்தான இரு தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை உயிர்வட்டமாகும். α, β தொலைக் கோணங்களுடைய புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள்

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \qquad ...(1)$$

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta) \qquad ...(2)$$

இவை வெட்டும் புள்ளி (r_1, θ_1) எனக் கொண்டால்

$$\frac{l}{r_1} = e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha) \qquad ...(3)$$

$$\frac{l}{r_1} = e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \beta) \qquad ...(4)$$

$$\therefore\ \cos(\theta_1 - \alpha) = \cos(\theta_1 - \beta)$$

$$\therefore\ \theta_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad ...(5)$$

இம் மதிப்பை (3)-ல் ஈடாக்கினுல்

$$\frac{l}{r_1} = e\cos\theta_1 + \cos\frac{\beta - \alpha}{2} \qquad ...(6)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விரித்து எழுதினுல்

$$\frac{l}{r} = (e + \cos\alpha)\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta$$

$$\frac{l}{r} = (e + \cos\beta)\cos\theta + \sin\beta\sin\theta$$

இக் கோடுகள் தம்முள் நேர் குத்தாயின்

$$(e + \cos\alpha)(e + \cos\beta) + \sin\alpha \sin\beta = 0$$

(அ-து) $e^2 + e(\cos\alpha + \cos\beta) + \cos(\alpha - \beta) = 0$

(அ-து) $e^2 + 2e\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - 1 = 0.$

இங்கு (5), (6)-ஐ ஈடாக்கினால்

$$e^2 - 1 + 2e\cos\theta_1\left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right) + 2\left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)^2 = 0$$

(அ-து) $e^2 - 1 + \frac{2el\cos\theta_1}{r_1} - 2e^2\cos^2\theta_1 + 2\frac{l^2}{r_1^2} - \frac{4le\cos\theta_1}{r_1} + 2e^2\cos^2\theta_1 = 0$

(அ-து) $(e^2 - 1)r_1^2 - 2elr_1\cos\theta_1 + 2l^2 = 0$

(அ-து) $(1 - e^2)r_1^2 + 2elr_1\cos\theta_1 - 2l^2 = 0$

$\therefore$ (r_1, θ_1)-ன் இயங்குவரை

$$(1 - e^2)r^2 + 2elr\cos\theta - 2l^2 = 0$$

$e = 1$ என்றால் உயிர்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$2lr\cos\theta - 2l^2 = 0$$

(அ-து) $r\cos\theta = l.$

(அ-து) $\frac{l}{r} = \cos\theta$

இது பரவளையத்து உயிர்க்கோட்டின் சமன்பாடு. எனவே, தம்முள் நேர்குத்தான பரவளையத் தொடுவரைகள் உயிர்க் கோட்டில் வெட்டும். பரவளையத்தின் உயிர்வட்டம் அதன் உயிர்க்கோடாகும்.

18. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$-ன் α தொலைக்கோணமுடைய புள்ளி யிடத்துச் செங்கோடு.

α இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$$

இக் கோட்டுக்கு நேர்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{k}{r} = e \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

(அ-து) $\frac{k}{r} = -e \sin\theta - \sin(\theta - \alpha)$

இது α இடத்துச் செங்கோடு ஆக வேண்டுமானல் $\left(\frac{l}{1 + e\cos\alpha}, \alpha\right)$ புள்ளிவழிச் செல்லவேண்டும்.

$$\therefore \frac{k(1 + e\cos\alpha)}{l} = -e\sin\alpha$$

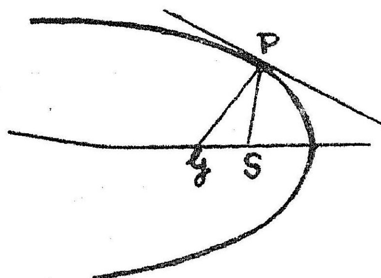
$$\therefore k = -\frac{le\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha}$$

எனவே, α இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{e\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha} \cdot \frac{l}{r} = e\sin\theta + \sin(\theta - \alpha)$$

மாதிரி 7.

ஒரு கூம்பு வெட்டியின் P இடத்துச் செங்கோடு ஆயத்தை G-ல் வெட்டினல் SG = e SP என நிறுவுக.



படம்-133

P-ன் தொலைக்கோணம் α எனக் கொள்க.

P இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{e\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha} \cdot \frac{l}{r} = e\sin\theta + \sin(\theta - \alpha)$$

இச் செங்கோடு ஆயத்தை G-ல் வெட்டினல் அவ்விடத்து $\theta = \pi$

$$\therefore \frac{e \sin \alpha}{1 + e \cos \alpha} \cdot \frac{l}{SG} = \sin \pi + \sin (\pi - \alpha)$$

(அ-து) $$\frac{e \sin \alpha}{1 + e \cos\alpha} \cdot \frac{l}{SG} = \sin \alpha$$

$$\therefore \quad SG = \frac{l e}{1 + e \cos \alpha}$$

P புள்ளியின் தொலைக்கோணம் α ஆகையால்

$$\frac{l}{SP} = 1 + e \cos \alpha \;\therefore SP = \frac{l}{1 + e\cos \alpha}$$

எனவே $SG = e. SP.$

மாதிரி 8.

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$-ன் L நேரகல நுனியிடத்துச் செங்கோடு வளைவரையை மீண்டும் Q-ல் வெட்டினால்

$$SQ = \frac{l (1 + 3e^2 + e^4)}{(1 + e^2 - e^4)}$$ என நிறுவுக.

L-ன் துணையெண்கள் $\left(l, \frac{\pi}{2} \right)$

'α' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{e \sin \alpha}{1 + e \cos \alpha} \cdot \frac{l}{r} = e \sin \theta + \sin (\theta - \alpha)$$

இங்கு $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ L இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{el}{r} = e \sin \theta - \cos \theta \qquad \ldots(1)$$

கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \qquad \ldots (2)$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் Q-ன் துணையெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

$$\therefore e (1 + e \cos \theta) = e \sin \theta - \cos \theta.$$

(அ-து) $(1 + e^2) \cos \theta - e \sin \theta + e = 0.$

(அ-து) $\{e + (1 + e^2) \cos\theta\}^2 = e^2 \sin^2\theta.$

(அ-து) $e^2 + (1+e^2)^2 \cos^2\theta + 2e(1+e^2)\cos\theta = e^2\sin^2\theta.$

(அ-து) $(1+e^2)^2 \cos^2\theta + 2e(1+e^2)\cos\theta + e^2\cos^2\theta = 0.$

$\cos\theta \neq 0. \therefore (1+e^2)^2\cos\theta + 2e(1+e^2) + e^2\cos\theta = 0.$

(அ-து) $(1 + 3e^2 + e^4)\cos\theta = -2e(1+e^2)$

$$\therefore \quad \cos\theta = -\frac{2e(1+e^2)}{1+3e^2+e^4} \qquad \ldots(3)$$

$\therefore$ SQ-ன் தொலைக்கோணம் (3)-ஆல் கிடைக்கும்

Q புள்ளி $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ ல் இருப்பதால்

$$\frac{l}{SQ} = 1 + e\cos\theta$$

$$= 1 - \frac{2e^2(1+e^2)}{1+3e^2+e^4} \qquad \ldots(3)$$

$$= \frac{1+e^2-e^4}{1+3e^2+e^4}$$

$$\therefore \quad SQ = l.\frac{(1+3e^2+e^4)}{(1+e^2-e^4)}$$

மாதிரி 9.

$\frac{l}{r} = + \cos\theta$ பரவளையத்தின் α, β, γ தொலைக்கோணங்களுடைய புள்ளியிடத்துச் செங்கோடுகள் (c, ϕ) புள்ளி வழிச் சென்றால்

(1) $\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} = 0$ என்றும்

(2) $\alpha + \beta + \gamma = 2\phi$ என்றும் நிறுவுக.

'θ_1' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{\sin\theta_1}{1+\cos\theta_1} \cdot \frac{l}{r} = \sin\theta + \sin(\theta - \theta_1).$$

இக்கோடு (c, ϕ) வழிச் சென்றால்

$$\frac{\sin\theta_1}{1+\cos\theta_1}\cdot\frac{l}{c}=\sin\phi+\sin(\phi-\theta_1)$$

$\tan\frac{\theta_1}{2}=t$ என இச் சமன்பாட்டில் கொண்டால்

$$\frac{l\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{c}=\sin\phi+\sin\phi\;\frac{1-t^2}{1+t^2}-\cos\phi\frac{2t}{1+t^2}$$

(அ-து) $$\frac{2lt}{2c}=\sin\phi+\sin\phi.\;\frac{1-t^2}{1+t^2}-\cos\phi.\;\frac{2t}{1+t^2}$$

(அ-து) $$\frac{lt(1+t^2)}{c}=(1+t^2+1-t^2)\sin\phi-2t\cos\phi$$

(அ-து) $lt^3+lt=2c\sin\phi-2\,ct\cos\phi.$

(அ-து) $lt^3+(l+2c\cos\phi)\,t-2c\sin\phi=0$ ...(1)

இது முப்படிச் சமன்பாடு ஆகையால் இதற்கு மூன்று தீர்வுகள் உண்டு.

ஒவ்வொரு தீர்வுக்குத்தா, பரவளையத்தின் ஒரு செங் கோடு (c,ϕ) வழிச் செல்லும். அச் செங்கோட்டு அடிகள் α,β,γ ஆகும்.

$\therefore$ (1)-ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3 எனக் கொண்டால்

$$\tan\frac{\alpha}{2}=t_1,\ \tan\frac{\beta}{2}=t_2,\ \tan\frac{\gamma}{2}=t_3$$

(1) சமன்பாட்டிலிருந்து $t_1+t_2+t_3=0$ (2)

$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=\frac{l+2c\cos\phi}{l}\qquad(3)$$

$$t_1t_2t_3=\frac{2c\sin\phi}{l}\qquad(4)$$

என்று வரும்.

$\therefore\ \tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}=0$, { (2)-ஆல் }

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\Sigma\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\Sigma\tan\frac{\alpha}{2}.\ \tan\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\Sigma t_1 - t_1 t_2 t_3}{1 - \Sigma t_1 t_2}$$

$$= \frac{0 - \dfrac{2c \sin \phi}{l}}{1 - \dfrac{l + 2c \cos \phi}{l}}$$

$$= \tan \phi$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = n\pi + \phi, \text{ (} n \text{ ஒரு முழு எண்)}$$

$$\therefore \quad \alpha + \beta + \gamma = 2n\pi + 2\theta.$$

($n = 0$) என்றால், $\alpha + \beta + \gamma = 2\phi$.

19. (r_1, θ_1) புள்ளியின் $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வெட்டியைச் சார்ந்த துணைக்கோடு.

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்பு வெட்டியின் P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் வெட்டும் புள்ளி(r_1, θ_1)எனவும், P, Q புள்ளிகளின் தொலைக் கோணங்கள் $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ எனவும் கொள்வோம். (r_1, θ_1)-ன் துணைக்கோடு PQ ஆகும்.

PQ-ன் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = e \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha)$ ...(1)

P, Q இடத்துத் தொடுவரைகள்

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha + \beta)$$

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha - \beta)$$

இத் தொடுவரைகள் (r_1, θ_1)-ல் வெட்டுவதால்

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos (\theta_1 - \alpha + \beta) \quad \text{...(2)}$$

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos (\theta_1 - \alpha - \beta) \quad \text{...(3)}$$

$$\therefore \quad \cos (\theta_1 - \alpha + \beta) = \cos (\theta_1 - \alpha - \beta)$$

$$\therefore \quad \theta_1 - \alpha + \beta = \pm (\theta_1 - \alpha - \beta)$$

+ குறியை எடுத்துக்கொண்டால் $\beta = 0$ என்று வரும். இந்நிலையில் P, Q புள்ளிகள் ஒன்றுபடும். P,Q புள்ளிகள் வெவ்வேறு புள்ளிகள் எனக் கொண்டோம், ஆதலின் + குறியைக் கொள்ள வேண்டாம். — குறியை எடுத்துக்கொண்டால்

$\theta_1 - \alpha + \beta = -(\theta_1 - \alpha - \beta)$

$$\therefore \theta_1 = \alpha.$$

இதனை (2)-ல் ஈடாக்கினால் $\dfrac{l}{r_1} = e\cos\beta_1 + \cos\beta$

$$(\text{அ-து}) \cos\beta = \frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1$$

α, β-ன் மதிப்புகளை (1)-ல் ஈடாக்கினால்

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \frac{1}{\dfrac{l}{r_1} - e\cos\theta_1}\cos(\theta - \theta_1)$$

$$(\text{அ-து}) \quad \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right) = \cos(\theta - \theta_1)$$

20. (r_1, θ_1) லிருந்து $\dfrac{l}{r} + 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வெட்டிக்கு வரையும் இரு தொடுவரைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு.

α தொலைக்கோணமுடைய P புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \qquad \ldots(1)$$

இது (r_1, θ_1) வழிச் சென்றால்

$$\frac{l}{r_1} = e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha) \qquad \ldots(2)$$

(r_1, θ_1)-லிருந்து கூம்புவெட்டிக்கு வரையும் தொடுவரையில் உள்ள புள்ளியின் துணையெண்கள், (2)-ஆல் வரும். α-ன் மதிப்புக்கு, (1)-ல் பொருந்தும். எனவே (1),(2) சமன்பாடுகளிலிருந்து α-வை அகற்றினால், தொடுவரைப் புள்ளிகளின் துணையெண்கள் இசையும் ஒரு சமன்பாடு வரும்.

(1), (2) சமன்பாடுகளை விரித்து எழுதினால்

$$\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta - \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right) = 0$$

$$\cos\alpha\cos\theta_1+\sin\alpha\sin\theta_1-\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)=0$$

எனவே,

$$\frac{\cos\alpha}{\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)\sin\theta_1-\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)\cos\theta-\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta_1\right)\cos\theta_1}=\frac{1}{\sin(\theta_1-\theta)}$$

$$\therefore\quad\left\{\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)\sin\theta_1-\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)\sin\theta\right\}^2$$

$$+\left\{\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)\cos\theta-\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)\cos\theta_1\right\}^2$$

$$=\sin^2(\theta_1-\theta)$$

(அ-து)

$$\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)^2+\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)^2-2\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)$$

$$\left(\frac{l}{r_1}-e_1\cos\theta_1\right)\cos(\theta-\theta_1)=\sin^2(\theta_1-\theta)$$

(அ-து)

$$\left\{\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)^2-1\right\}\left\{\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)^2-1\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)-\cos(\theta_1-\theta)\right\}^2 \quad (3)$$

இச் சமன்பாட்டினுல் $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு காணலாம்.

அதிபரவளையத்தின் மையம் $\left(\frac{le}{e^2-1},0\right)$

மையத்திலிருந்து அதிபரவளையத்துக்கு வரையும் தொடுவரைகள் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் ஆகையால்

(3)-ல் $r_1 = \frac{le}{e^2 - 1}$, $\theta_1 = 0$-ஐ ஈடாக்கினுல் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு வரும். எனவே, எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$$\left\{\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2 - 1\right\} \left\{\left(\frac{e^2 - 1}{e} - e\right)^2 - 1\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\left(\frac{e^2 - 1}{e} - e\right) - \cos\theta\right\}^2$$

(அ-து) $\left\{\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$

$$= \left\{-\frac{1}{e}\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right) - \cos\theta\right\}^2$$

(அ-து) $\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2 \frac{(1 - e^2)}{e^2} - \frac{1 - e^2}{e^2}$

$$= \frac{\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2}{e^2} + \frac{2\cos\theta\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)}{e} + \cos^2\theta$$

(அ-து) $-\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2 - \left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$

$$= \frac{2\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\cos\theta}{e} + \cos^2\theta.$$

(அ-து) $\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2 + 2\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\frac{\cos\theta}{e}$

$$= 1 - \frac{1}{e^2} - \cos^2\theta$$

(அ-து) $\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta + \frac{\cos\theta}{e}\right)^2$

$$= 1 - \frac{1}{e^2} - \cos^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{e^2}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)(1 - \cos^2\theta)$$

$$= \frac{e^2 - 1}{e^2}\sin^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{l}{r} - \cos\theta + \frac{\cos\theta}{e} = \pm \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\sin\theta$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{l}{r} = \cos\theta\left(e - \frac{1}{e}\right) \pm \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\sin\theta$$

$$= \frac{e^2-1}{e}\left\{\cos\theta \pm \frac{\sin\theta}{\sqrt{e^2-1}}\right\}$$

மாதிரி 10.

$2l$ நேரகல நீளமுடைய கூம்புவெட்டியின் உயிர்ப்புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் கூம்புவெட்டியை உயிர்ப்புள்ளியி லிருந்து r_1, r_2, r_3, r_4 தொலையில் வெட்டினால்

$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}$ என நிறுவுக

உயிர்ப்புள்ளியைப் போலாகவும், ஆயத்தைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால் கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \qquad \dots (1)$$

S வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் விட்டம் d, அதன் விட்டம் ஆயத்தோடு சாய்ந்திருக்கும் கோணம் α என்றால் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r = d\cos(\theta - \alpha) \qquad \dots (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து θ-வை அகற்றினால் r_1, r_2, r_3, r_4-ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட r-ன் சமன்பாடு ஒன்று தோன்றும்.

(1)-ஆல் $\cos\theta = \frac{l-r}{re}$ $\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{(l-r^2)}{r^2e^2}}$

(2)-ஐ விரித்து எழுதினால்

$$r = d\cos\theta\cos\alpha + d\sin\theta\sin\alpha$$

$$(\text{அ-து})\ r = d\cos\alpha\,\frac{l-r}{re} + d\sin\alpha\sqrt{1 - \frac{(l-r)^2}{r^2e^2}}$$

(அ-து) $\{r^2e - d(l-r)\cos\alpha\}^2 =$
$d^2\sin^2\alpha\{r^2e^2 - (l-r)^2\}$

(அ-து) $e^2r^4 + 2de\cos\alpha\, r^3$
$+ (d^2 - del\cos\alpha - d^2e^2\sin^2\alpha)r^2 - 2ld^2r + d^2l^2 = 0$

$$\therefore \quad r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{d^2 l^2}{e^2} \quad \ldots \quad (3)$$

$$r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4 r_1 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_2 r_3 = \frac{2ld^2}{e^2} \quad (4)$$

(4)-ஐ (3)-ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}.$$

மாதிரி 11.

இரு கூம்புவெட்டிகளுக்கு ஒரு பொது உயிர்ப்புள்ளி இருப்பின், அவற்றின் பொது நாண்களுள் இரண்டு அவற்றின் உயிர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

பொது உயிர்ப்புள்ளியைப் போலாகவும், ஒரு கூம்பு வெட்டியின் ஆயத்தைத் தொடக்கக் கோடாகவும், ஏனைய கூம்பு வெட்டியின் ஆயம் இக் கோட்டோடு α கோணம் சாய்ந்திருப்ப தாகவும் கொண்டால் கூம்பு வெட்டிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{L}{r} = 1 + E\cos(\theta - \alpha) \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) கூம்புவெட்டிகளின் பொது உயிர்ப் புள்ளியின்

ஒத்த உயிர்க்கோடுகள் $\frac{l}{r} = e\cos\theta$,

$\frac{L}{r} = E\cos(\theta - \alpha)$

(2)-ஐ (1)-லிருந்து கழித்தால்

$$\frac{l - L}{r} = e\cos\theta - E\cos(\theta - \alpha) \quad \ldots \quad (3)$$

இது ஒரு கோட்டினைக் குறிப்பதாலும், (1), (2) கூம்பு வெட்டிகளின் பொதுப் புள்ளிகள் வழிச் செல்வதாலும், ஒருபொது நாணைக் குறிக்கும்.

(r, θ), $(-r, \pi + \theta)$ துணையெண்கள் ஒரே புள்ளியைக்

குறிப்பதால் $-\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta + \pi)$

(அ-து) $\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$-வும்

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$-வும் ஒரே கூம்புவெட்டியைக் குறிக்கும்.

(1) கூம்புவெட்டியின் சமன்பாட்டை

$$\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta \qquad \ldots(4)$$

என்று கொள்க.

$$\frac{L}{r} = 1 + E\cos(\theta - \alpha)$$

இச் சமன்பாடுகளைக் கூட்டவே

$$\frac{l + L}{r} = e\cos\theta + E\cos(\theta - \alpha) \qquad \ldots \quad (5)$$

இச் சமன்பாடு ஒரு கோட்டினைக் குறிப்பதாலும் கூம்பு வெட்டிகளின் பொதுப் புள்ளிவழிச் செல்லுவதாலும், இது ஒரு பொது நாணினைக் குறிக்கும்.

$\therefore$ இக் கூம்புவெட்டிகளின் பொது நாண்களுள் இரண்டின் சமன்பாடு.

$$\frac{l - L}{r} = e\cos\theta - E\cos(\theta - \alpha)$$

$$\frac{l + L}{r} = e\cos\theta + E\cos(\theta - \alpha)$$

$$(அ\text{-}து)\ \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right) - \left\{\frac{L}{r} - E\cos(\theta - \alpha)\right\} = 0$$

$$\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right) + \left\{\frac{L}{r} - E\cos(\theta - \alpha)\right\} = 0$$

இந் நாண்கள் $\frac{l}{r} - e\cos\theta = 0$, $\frac{L}{r} - E\cos(\theta - \alpha) = 0$

கோடுகள் அஃதாவது (1), (2) கூம்புவெட்டிகளின் உயிர்க் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும்.

மாதிரி 12.

21. போலார் சமன்பாட்டிலிருந்து வளைவரை வரைதல்.

$\frac{10}{r} = 3\cos\theta + 4\sin\theta + 5$ சமன்பாடு வளைவரையை வரைக.

இச் சமன்பாட்டை $\frac{2}{r} = 1 + \frac{3}{5}\cos\theta + \frac{4}{5}\sin\theta$ என்று எழுதலாம்.

$\frac{3}{5} = \cos\alpha$ என்றால், $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$$\frac{2}{r} = 1 + \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$$

$$= 1 + \cos(\theta - \alpha)$$

இது போலை உயிர்ப்புள்ளியாகவும், தொடக்கக் கோட்டோடு α கோணம் சாய்ந்த கோட்டை ஆயமாகவும் கொண்ட கூம்பு வெட்டியாகும். இக் கூம்புவெட்டியின் மையத்தொலைத் தகவு $=1$.

∴ இக் கூம்புவெட்டி ஒரு பரவளையமாகும்.

$\alpha = 53^\circ 8'$ (அண்ணளவாக)

பரவளையத்தின் அரை நேரகலம் $= 2$

∴ நேரகலம் $= 4$

பரவளையத்தின்முனை A என்றால் $AS = 1$

நேரகலத்தின் நுனிகள் L, L' என்றால் $SL = SL' = 2$

$\theta = 0$ என்றால் $\frac{2}{r} = 1 + \cos\alpha = 1 + \frac{3}{5}$

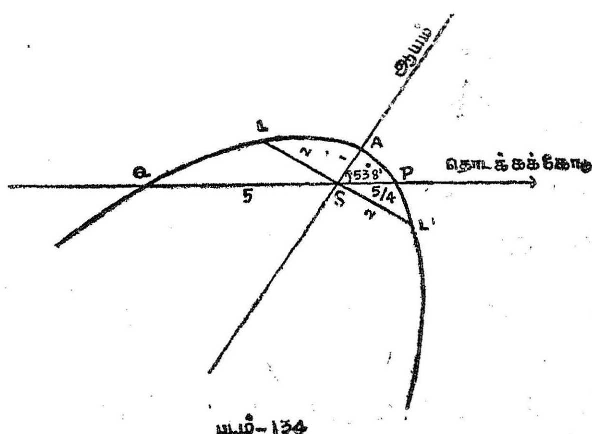
$$\therefore \quad r = \frac{5}{4}$$

$\theta = \pi$ என்றால்

$$\frac{2}{r} = 1 + \cos(\pi - \alpha) = 1 - \cos\alpha = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \quad \therefore \quad r = 5$$

∴ பரவளையம் தொடக்கக் கோட்டை P-லும், தொடக்கக்கோட்டின் எதிர்த் திசை நீட்சியை Q-லும் வெட்டினால்

$SP = \frac{5}{4}$, $SQ = 5$.



படம்-134

மாதிரி 13.

$\frac{12}{r} = 4 + \sqrt{3}\cos\theta + 3\sin\theta$ வளைவரையை வரைக.

இச் சமன்பாட்டை 4-ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{3}{r} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

இதனை $\frac{3}{r} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

என்று எழுதலாம்

∴ இக் கூம்புவெட்டியின் உயிர்ப்புள்ளிகளுள் ஒன்று போல், அரை நேரகலம் 3, மையத் தொலைத்தகவு $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆயம் தொடக்கக் கோட்டோடு சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\frac{\pi}{3}$.

மையத் தொலைத் தகவு ஒன்றை விடக் குறைவாக இருப்பதால். இக் கூம்புவெட்டி நீள் வட்டமாகும்.

$$l = \frac{b^2}{a} = a\,(1 - e^2)$$

எனவே, $3 = a\left(1 - \frac{3}{4}\right) \therefore a = 12$

$$b^2 = al = 12 \times 3 = 36 \quad \therefore b = 6.$$

ஏனைய உயிர்ப்புள்ளி S' என்றால்

$$SS' = 2CS = 2ae = \frac{2 \times 12 \times \sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

S-ன் அருகிலுள்ள முனை A என்றால் $SA = 12 - 6\sqrt{3}$ $= 6\,(2 - \sqrt{3})$

இவற்றால் $A, L, B, L_1, A', L'_1, B', L'$ புள்ளிகளைக் கண்டு வளைவரையை வரையலாம். (படம் 135-ல் $L'\ S'\ L_1'$ என்பது $L_1\ S'\ L_1'$ என்றிருக்க வேண்டும்.)

படம் - 135

மாதிரி 14.

$\frac{2}{r} = 1 + \cos\theta + \sin\theta$ சமன்பாட்டு வளைவரையை வரைக.

இச் சமன்பாட்டை $\frac{2}{r} = 1 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$

என்று எழுதலாம்.

(அ-து) $\frac{2}{r} = 1 + \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

எனவே, போல் இக் கூம்பு வெட்டியின் உயிர்ப்புள்ளிகளுள் ஒன்றாகும்.

இக் கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலைத்தகவு $= \sqrt{2}$.

$\therefore$ இது ஒரு செவ்வக அதிபரவளையமாகும். கூம்பு வெட்டியின் ஆயம் தொடக்கக் கோட்டோடு $\frac{\pi}{4}$ கோணம் சாய்ந்து இருக்கும்.

செவ்வக அதிபரவளையத்தில் $a = b$.

அரை நேரகலம் $\frac{b^2}{a} = 2$.

$\therefore \quad a = b = 2.$

ஏனைய உயிர்ப்புள்ளி S' என்றால்

$SS' = 2CS = 2ae = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

S'-ன் ஒத்த உயிர்க்கோட்டின் அடி Z' என்றால்,

$$CZ' = CZ = \frac{a}{e} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad SZ' = CS + CZ' + ae + \frac{a}{e} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

S-ன் பக்கத்திலுள்ள அதிபரவளையத்தின் முனை A என்றால்,

$AS = CS - CA = ae - a = 2(\sqrt{2} - 1)$

S'-ன் பக்கத்திலுள்ள முனை A' என்றால்

$SA' = CS + CA' = ae + a = 2(\sqrt{2} + 1).$

எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளின் போக்கைக் காண r-க்கு எண்ணிலி மதிப்பைக் கொடுக்கும் θ-வின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\therefore 1 + \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\therefore \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

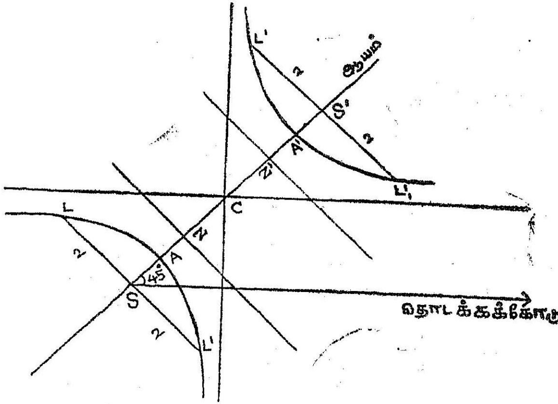
$$= \cos\left(\pi \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \theta - \frac{\pi}{4} = \pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore \theta = \pi \text{ அல்லது } \frac{3\pi}{2}.$$

$\therefore \quad \theta = \pi, \theta = \dfrac{3\pi}{2}$ கோடுகள் CE, CF எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளுக்கு ஒருபோகானவை. வளைவரையின் உருவத்தினையும் நிலையையும் படத்திற் காண்க.

[படத்தில் $L'S'L_1'$-ஐ $L_1S'L_1'$ எனக் கொள்க]



படம்-136

பயிற்சிகள் 23.

1. $r = A\cos\theta + B\sin\theta$ ஒரு வட்டத்தினைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. இவ்வட்டத்தின் மையம் யாது ?

2. $\dfrac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ கோடு, $r = 2a\cos\theta$ வட்டத்தைத் தொடுதற்குக் கட்டுபாடு என்ன ?

3. $r^2 - 2rr_1\cos\theta + r_1^2 = a^2$ வட்டத்தை $r\cos(\theta - \alpha)$. $= a + r_1\cos\alpha$ கோடு தொடுமென நிறுவுக

4. $(a, \alpha), (b, \beta)$ புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் போலார் சமன்பாடு $r^2 - r\{a\cos(\theta - \alpha) + b\cos(\theta - \beta)\} + ab\cos(\alpha - \beta) = 0$ என நிறுவுக.

5. (r_1, θ) புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் தொடக்கக் கோட்டினைப் போலிருந்து c தொலையிடத்துத் தொட்டால் அதன் போலார் சமன்பாடு

$$\frac{r^2 - 2cr\cos\theta + c^2}{r\sin\theta} = \frac{r_1^2 - 2cr_1\cos\theta_1 + c^2}{r\sin\theta_1}$$ என

நிறுவுக.

6. $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$. $r = 2b\cos(\theta - \beta)$ வட்டங்கள் $(\alpha - \beta)$ கோணத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

7. O ஒரு நிலைப்புள்ளி, P குறித்த வட்டத்தில் இயங்கும் ஒரு புள்ளி. OP-ன் நீட்சியில் OP. OQ $= k^2$ என்றிருக்க இயங்கும் என்றால், Q-ன் இயங்குவரை ஒரு வட்டம் எனவும், O குறித்த வட்டத்தில் இருந்தால் Q-ன் இயங்குவரை ஒரு கோடு எனவும் நிறுவுக.

8. குறித்த இரு வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்றினை வழி இரு வட்டங்களையும் ஒருகோடு P, Q-ல் வெட்டினால் PQ-வின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை ஒரு வட்டமென நிறுவுக.

9. $r^2 - 2(a - \lambda)r\cos\theta + 2\lambda d = 0$ சமன்பாடு λ வேறுபடும்பொழுது, அது பொதுவாயமுடைய ஒரு நிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. சமதொடுவரையாயத்தையும், எல்லைப் புள்ளிகளையும் காண்க.

10. செவ்வக அதிபரவளையத்தின் நேர்குத்தான உயிர்ப் புள்ளிவழி நாண்களின் நீளம் சமம் என நிறுவுக.

11. PP′, QQ′ கூம்புவெட்டி ஒன்றின் உயிர்ப்புள்ளி வழி நாண்கள் என்றால் $\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'}$ மாறு ராசியென நிறுவுக.

12. PP′, QQ′ கூம்புவெட்டி ஒன்றின் உயிர்ப்புள்ளிவழி நாண்கள் என்றால் $\frac{1}{PP'} - \frac{1}{QQ'}$ மாறு ராசியென நிறுவுக.

13. PSQ, P′SQ′ ஒரு கூம்புவெட்டியின் தம்முள் நேர்குத்தான இரு உயிர்ப்புள்ளி வழி நாண்கள் என்றால் $\frac{1}{PS \cdot SQ} + \frac{1}{P'S \cdot SQ'}$ மாறு ராசியென நிறுவுக.

14. நேரகலம் $2l$, மையத் தொலைத் தகவு e உடைய ஒரு கூம்புவெட்டியின் P, Q நாண் S உயிர்ப் புள்ளியிடத்துச் செங்கோணம் பிறப்பித்தால்

$$\left(\frac{1}{SP}-\frac{1}{l}\right)^2+\left(\frac{1}{SQ}-\frac{1}{l}\right)^2=\frac{e^2}{l^2}$$ என நிறுவுக.

15. நீள்வட்டத்தின் S. H உயிர்ப்புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நாண்கள் PSQ, PHR என்றால் $\frac{PS}{SQ}+\frac{PH}{HR}$-இன் மதிப்பு P-ன் நிலையைப் பொறுத்ததன்று என நிறுவுக.

10. S-ஐ பொதுவுயிர்ப் புள்ளியாகக் கொண்டஒருநீள்வட்டமும் ஒரு பரவளையமும் P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைதகவு e, SP நெட்டச்சோடு சாய்ந்திருக்கும் கோணம் α, பரவளையத்தின் முனை P என்றால் $\frac{SQ}{SP}=1+\frac{4e^2\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}$ என நிறுவுக.

17. $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$-ன் உயிர்க்கோடுகள் $\frac{l}{r}=e\cos\theta$, $\frac{l}{r}=\frac{e^2+1}{e^2-1}e\cos\theta$ என நிறுவுக

18. $\frac{l}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta$ கோடு $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ கூம்பு வெட்டிக்குத் தொடுவரையாதற்குக் கட்டுப்பாடு என்ன ?

19. $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$, $\frac{l}{r}=1+e'\cos\theta$, கூம்புவெட்டிகளுக்கு இரு பொதுத் தொடுவரைகள் இருப்பின் $e\sim e'<2$ என நிறுவுக.

20. $\frac{l_1}{r}=1+e_1\cos\theta$, $\frac{l_2}{r}=1+e_2\cos(\theta-\alpha)$ கூம்பு வெட்டிகள் தம்முள் தொடுதற்குக் கட்டுப்பாடு
$l_1^2(1-e_2^2)+l_2^2(l-e_1^2)=2l_1l_2(1-e_1e_2\cos\alpha)$ எனநிறுவுக.

21. நீள்வட்டத்தின் உயிர்ப்புள்ளிவழி நாண் SP, நெட்டச்சோடு α கோணம் சாய்ந்திருப்பின், P இடத்துத் தொடுவரைக்கு S-லிருந்து வரையும் நேர்குத்துக்கோடு $\tan^{-1}\frac{\sin\alpha}{e+\cos\alpha}$ கோணத்தில் சாய்ந்திருக்குமென நிறுவுக.

22. ஒரு கூம்புவெட்டி உயிர்ப்புள்ளியிடத்து PQ நாண் 2α கோணத்தைப் பிறப்பிக்கிறது. P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடு வரைகள் T-ல் வெட்டினால் $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} - \frac{2\cos\alpha}{ST}$ மாரு ராசியென நிறுவுக.

23. இரு கூம்புவெட்டிகளுக்கு ஒரே உயிர்ப்புள்ளி, ஒரே உயிர்க்கோடு, வெளி வளைவரையிலிருந்து உள் வளைவரைக்கு வரையும் தொடுவரை அவ்வுயிர்ப் புள்ளியிடத்து மாருக் கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

24. $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$ பரவளையத்தின் $\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\alpha = \frac{\pi}{3}\right)$ தொலைக் கோணங்களுடைய புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள், $\frac{8a(1+\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha}$ வை நேரகலமாகக் கொண்ட ஒரே உயிர்ப்புள்ளி ஒரே ஆய (Confocal Coaxial) பரவளையத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக

25. நேரகல நீட்சிப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து கூம்புவெட்டிக்கு இரு தொடுவரைகள் வரையப்பட்டுள. உயிர்ப்புள்ளியிலிருந்து இத் தொடுவரை தொடுகுத்துகளின் தொலைகள் r, r_1 என்ருல் r, அரைநேரகலம், r_1 இசைத் தொடராகும் என நிறுவுக.

26. ஒரு நீள்வட்டத்தின் உயிர்ப்புள்ளி வழி நாண் நெட்டச்சோடு α கோணம் சாய்ந்திருப்பின் நாண் நுனிகளிடத்துத் தொடுவரைகளிடைப்பட்ட கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{2e\sin\alpha}{1-e^2}\right)$ என நிறுவுக.

27. $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ பரவளையத்தின் α, β, γ தொலைக் கோணங்களுடைய புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம்

$$r = \frac{l}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\cos\left(\theta - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$$ எனவும்,

இவ் வட்டம் பரவளையத்தின் உயிர்ப்புள்ளி வழிச் செல்லும் எனவும் நிறுவுக.

28. ஒரு பரவளையத்தின் A, B, C, புள்ளிகளித்துத் தொடுவரைகளால் அமைந்த முக்கோணம் A′ B′ C′ என்றால் SA SB. SC = SA′. SB′. SC′ என நிறுவுக. இங்கு, பரவளையத்தின் உயிர்ப்புள்ளி S ஆகும்

29. α தொலைக் கோணமுடைய புள்ளியிடத்துத் தொடுவரைக்கு ஒரு போகான $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ன் தொடுவரைச் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 2e \cos \alpha + 1} \{ e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha)\}$ என நிறுவுக.

30. ஒரு கூம்புவெட்டியின் PQ நாண், S உயிர்ப் புள்ளியிடத்து நிலைத்த கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின், S-ஐ உயிர்ப்புள்ளியாகவும் இக் கூம்புவெட்டியின் உயிர்க்கோட்டை உயிர்க்கோடாகவும் கொண்ட ஒரு நிலைத்த கூம்புவெட்டியை PQ தொடும் என நிறுவுக.

31. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ கூம்புவெட்டியின் QR நாண் S உயிர்ப்புள்ளியிடத்து 2α நிலைக்கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின், QSR கோணத்தின் சமவெட்டி QR கோட்டை வெட்டும் புள்ளி P-ன் இயங்குவரை $\frac{l \cos \alpha}{r} = 1 + e \cos \alpha \cos \theta$ என நிறுவுக.

32. ஒரு கூம்புவெட்டியின் உயிர்ப்புள்ளிகள் S, S_1. உயிர்ப் புள்ளிவழி நாண்கள் PSP_1, QSQ_1. P_1 Q நாண் S_1 வழிச் சென்றால் PQ_1 குறுக்காயத்தை ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் வெட்டும் என நிறுவுக.

33. $\frac{l}{r} e = 1 + e \cos \theta$ கூம்புவெட்டியின் புள்ளிகள் P, Q, R (உயிர்ப்புள்ளி S). Q இடத்துத் தொடுவரையை SP, SQ வெட்டும் புள்ளிகள் M N, SM = SN = l என்றால் $\frac{l}{r} = 1 + 2e \cos \theta$ கூம்புவெட்டியை SQ, PR-ஐ வெட்டும் இடத்து, PR தொடுமென நிறுவுக.

34. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\alpha$ கூம்புவெட்டியின் α தொலைக் கோணமுடைய புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு போலிடத்து $2\tan^{-1}\left(\frac{1 + 2e\cos\alpha + e^2}{e\sin\alpha}\right)$ கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

35. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்புவெட்டியின் α, β, γ தொலைக் கோணங்களுடைய புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் சென்ருல்

$$\frac{\Sigma\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}{\Sigma\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2$$ என நிறுவுக.

36. S வழிச் செல்லும் குறித்த ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்புவெட்டியை A, B, C, D புள்ளிகளில் வெட்டினுல் SA, SB, SC. SD. மாரு ராசியென நிறுவுக.

37. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ நீள்வட்டத்தின் P, Q புள்ளிகளின் தொலைக் கோணங்கள் $\alpha - \beta, \alpha + \beta$, PS, QS' கோடுகள் நீள்வட்டத்தில் வெட்டினுல் $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$ என நிறுவுக.

38. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்புவெட்டியின் உயிர்ப்புள்ளிகளுள் ஒன்றையும், மையத் தொலைத்தகவையும் பொதுவாகக் கொண்ட ஒரு கூம்புவெட்டி, முதல் கூம்புவெட்டியை α தொலைக் கோணமுடைய புள்ளியில் தொட்டால், அதன் நேரகலத்தின் நீளம் $\frac{2l(1 - e^2)}{1 + 2e\cos\alpha + e^2}$ என நிறுவுக.

39. குறித்த நீளத்தை நேரகலமாகவும், நிலைப்புள்ளி ஒன்றை உயிர்ப்புள்ளிகளுள் ஒன்ருகும் கொண்ட கூம்புவெட்டிகள் ஒரு நிலைத்த கோட்டினைத் தொட்டால், அவற்றின் மையங்களின் இயங்குவரை ஒரு கூம்புவெட்டியென நிறுவுக.

40. பின்வரும் சமன்பாடுகள் குறிப்பிடும் வளைவரைகளை வரைக :—

(1) $\frac{2}{r} = 1 + \cos\theta$

(2) $\frac{2}{r} = 1 + \frac{1}{2}\cos\theta$

(3) $\frac{2}{r} = 1 + 2\cos\theta$

(4) $\frac{3}{r} = 1 + 2\sin\theta$

(5) $r = \frac{10}{1 - 2\cos\theta}$

(6) $\frac{1}{r} = 1 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$

(7) $r = 3\cos\theta + 4\sin\theta$

(8) $r = 4\sin\theta$

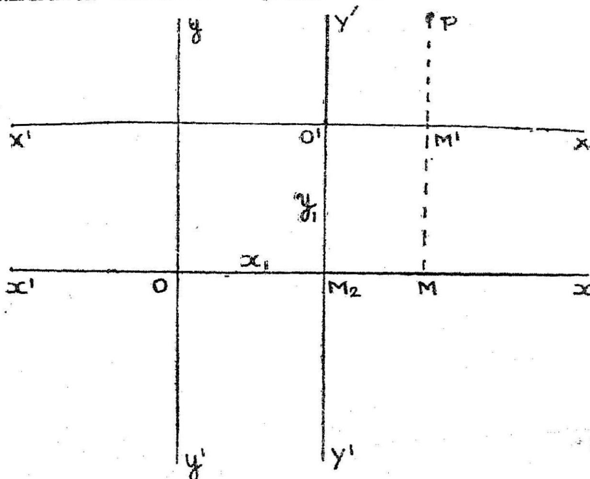
(9) $\sqrt{r}\cos(\theta/2) = \sqrt{a}$

10. கூம்பு வெட்டிகள் வரைதல்.

(Tracing of Conics)

பகுதி 1—ஆயங்கள் மாற்றல்

1. ஆயங்களின் போக்கை மாற்றாது ஆதியை மட்டும் மாற்றல்.



படம்—137

Ox, Oy ஆயங்கள் எனவும், அவற்றைப் பொறுத்து P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனவும், O'-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனவும், ஆதியை O'-க்கு மாற்றினபிறகு O'X, O'Y ஆயங்களைப் பொறுத்து P-ன் ஆயத்தொலைகள் (X, Y) எனவும் கொள்க.

$$x = OM = OM_2 + M_2M$$
$$= OM_2 + O'M'$$
$$= x_1 + X$$

இம்மாதிரியே $y = y_1 + Y$.

2. ஆதியை மாற்றாது ஆயங்களை θ கோணம் சுற்றுதல்.

X'OX, Y'OY புது ஆயங்கள் எனக்கொண்டால்

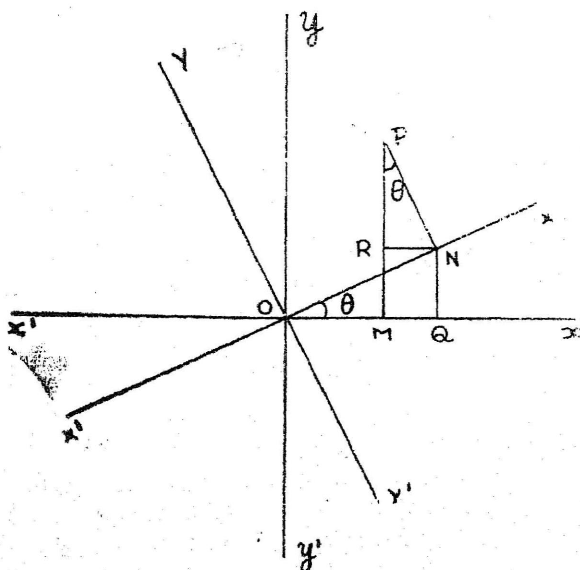
$$x\hat{O}X = \theta = y\hat{O}Y$$

பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனவும், புது ஆயங்களைப் பொறுத்து (X, Y) எனவும் கொள்க.

P-லிருந்து $x'Ox$, X'OX கோடுகளுக்கு நிரலே PM, PN கோடுகளை நேர்குத்தாக வரையின்

$$x = OM, \; y = MP, \; X = ON, \; Y = NP.$$

N-லிருந்து ox-க்கு NQ-வும், MP-க்கு NR-உம் நேர்குத்தாக வரைக.



படம் - 138

$$x = OM = OQ - MQ$$
$$= OQ - RN$$
$$= X\cos\theta - Y\sin\theta \quad \ldots (1)$$
$$y = MP = MR + RP$$
$$= QN + RP$$
$$= X\sin\theta + Y\cos\theta \quad \ldots (2)$$

(1)-ஐ $\cos\theta$ ஆலும் (2)-ஐ $\sin\theta$ ஆலும் பெருக்கிக் கூட்டினால் $X = x\cos\theta + y\sin\theta$.

(1)-ஐ $(-\sin\theta)$ ஆலும் (2)-ஐ $\cos\theta$ ஆலும் பெருக்கிக் கூட்டினால் $Y = -x\sin\theta + y\cos\theta$

3. xy உறுப்பின்றி ஆக்குதல்.

$ax^2 + 2hxy + by^2$ கோவை, ஆயங்களை மாற்றி xy உறுப்பு இல்லாத ஒரு கோவையாக வரும் முறையைக் காண்போம்.

ஆதியை மாற்றாது ஆயங்களைமட்டும் θ கோணம் சுற்றினால் P-ன் ஆயத்தொலைகள் பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து (x, y) எனவும், புது ஆயங்களைப் பொறுத்து (X, Y) எனவும் கொள்க.

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

$$\therefore\ ax^2 + 2hxy + by^2 = a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2$$
$$+2h(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) + b(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 = (a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta)X^2$$
$$-2\{(a-b)\sin\theta\cos\theta - h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\}XY$$
$$+(a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta)Y^2$$

XY உறுப்பின்மைக்கு $\frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta - h\cos 2\theta = 0$

என்றிருத்தல் வேண்டும்.

$$(\text{அ-து})\quad \tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}.$$

பகுதி 2—சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கூம்புவெட்டிகள் வரைதல்.

4. பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும் என நிறுவுதல்.

சமன்பாட்டினை

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க. ஆதியை மாற்றாது ஆயங்களை θ கோணம் சுற்றினால், புதிய

ஆயங்களைப் பொறுத்த சமன்பாடு காண முந்தின சமன்பாட்டில் x-க்குப் பதில் $X\cos\theta - Y\sin\theta$-ஐயும், y-க்குப் பதில் $X\sin\theta + Y\cos\theta$-ஐயும் ஈடாக்கல் வேண்டும்.

அங்ஙனம் பெற்ற சமன்பாடு

$$a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 2h(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta)$$
$$+ b(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 + \text{முதற்படி உறுப்புகள்} + c = 0 \quad (1)$$

இச்சமன்பாட்டில் XY-ன் கெழு

$$2(b-a)\sin\theta\cos\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

(அ-து) $(b-a)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta$.

இக் கோவையைச் சுன்னமாகும்படி θ வைக் கொண்டால்

$$(b-a)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta = 0$$

(அ-து) $\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b}$

a, b, h-ன் அனைத்து மதிப்புக்கும் 2θ-க்கு ஒரு மெய் மதிப்புக் காணலாம்.

இந் நிலையில் (1) சமன்பாடு

$AX^2 + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0$ ......

இங்கு A, B, G, F, C நிலையெண்களாகும். (2)

வகை 1. A, B இரண்டின் மதிப்பும் சுன்னம் இல்லையென்றால்

(2) சமன்பாட்டை

$$A\left(X + \frac{G}{A}\right)^2 + B\left(Y + \frac{F}{B}\right)^2 = \frac{G^2}{A} + \frac{F^2}{B} - C$$

என்று எழுதலாம்.

இங்கு $\dfrac{G^2}{A} + \dfrac{F^2}{B} - C = K$ எனக்கொண்டால், இச் சமன்பாடு $A\left(X + \dfrac{G}{A}\right)^2 + B\left(Y + \dfrac{F}{B}\right)^2 = K$ (3)

என்று வரும்.

ஆதியை $\left(-\dfrac{G}{A}, -\dfrac{F}{B}\right)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால், (3) சமன்பாடு $AX'^2 + BY'^2 = K$ (4)

என வரும்.

$K = 0$ என்றால், இது மெய் அல்லது கற்பனையான இரு கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$K \neq 0.$ $\frac{K}{A}, \frac{K}{B}$ இரண்டும் மிகையாக இருப்பின், இச் சமன்பாடு $\frac{X'^2}{K/A} + \frac{Y'^2}{K/B} = 1$ நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

K/A, K/B மாறுபட்ட குறியனவாக இருந்தால் இச் சமன்பாடு ஓர் அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும். K/A, K/B இரண்டும் குறைக்குறியுடையனவாக இருந்தால் X, Y-க்கு மெய் மதிப்புகள் வாரா. இந் நிலையில் இச் சமன்பாடு ஒரு கற்பனை நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

வகை **2.** A அல்லது B சுன்னம்.

A-ஐச் சுன்னமாகக் கொண்டால் (2) சமன்பாடு

$$B\left(Y + \frac{F}{B}\right)^2 = -2GX - C + \frac{F^2}{B} \qquad \ldots(5)$$

$G = 0$ என்றால் இது ஒரு போகு இருகோடுகளைக் குறிக்கும்.

$G \neq 0$ என்றால், (5) சமன்பாட்டை

$$\left(Y + \frac{F}{B}\right)^2 = \frac{2G}{-B}\left(X - \frac{F^2}{2BG} + \frac{C}{2G}\right)$$ என

எழுதலாம்.

ஆதியை $\left(\frac{F^2}{2BG} - \frac{C}{2G}, -\frac{F}{B}\right)$-க்கு மாற்றினால் இது ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

எனவே, எல்லா வகையிலும் இருபடிச் சமன்பாடு ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும்.

5. கூம்புவெட்டியின் தன்மையை அதன் சமன்பாட்டால் காணல்.

எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் வரையறையினால் பரவளையத்துக்கு உள்ளது ஒரே ஒரு எட்டாப் புள்ளித் தொடுதான் எனவும், நீள்வட்டத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் கற்பனைக் கோடுகள் எனவும், அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் மெய்க் கோடுகள் எனவும் காணலாம்.

கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots(1)$$

எனக் கொண்டால் அதன் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு எண்ணுருப்பில் மட்டுமே வேறுபட்டிருக்கும் எனக் கண்டோம்.

ஆதி வழி எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகளுக்கு ஒரு போகான கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad ...(2)$$

$h^2 > ab$ என்றால் (2) இரு மெய்க் கோடுகளாகும். இந் நிலையில் எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகள் மெய்க்கோடுகளாகும். எனவே, கூம்பு வெட்டி அதிபரவளையமாகும்.

$a + b = 0$ என்றால் (2) தம்முள் நேர்குத்தான இரு கோடுகளைக் குறிக்கும். இந் நிலையில் எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரைகள் தம்முள் நேர்குத்தாகும். எனவே, கூம்பு வெட்டி செவ்வக அதிபரவளையமாகும்.

$h^2 < ab$. என்றால் (2) இரு கற்பனைக் கோடுகளாகும். இந் நிலையில் எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் கற்பனைக் கோடுகளாகும். எனவே, கூம்பு வெட்டி நீள்வட்டமாகும்.

$h^2 = ab$ என்றால் (2) ஒன்றுபட்ட இரு கோடுகளாகும். இந் நிலையில் கூம்பு வெட்டிக்கு ஒரு எட்டாப்புள்ளித் தொடுவரை தான் உண்டு. எனவே, கூம்புவெட்டி பரவளையமாகும்.

பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு எத்தன்மையான கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும் எனக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் காணலாம். பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

வளைவரை	கட்டுப்பாடு.
நீள்வட்டம்	$h^2 < ab$
அதிபரவளையம்	$h^2 > ab$
செவ்வக அதிபரவளையம்	$a + b = 0$
பரவளையம்	$h^2 = ab$
வட்டம்	$a = b,\ h = 0$
இரு கோடுகள்	$\triangle = 0$

6. கூம்பு வெட்டியின் மையம்.

ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கூம்பு வெட்டியின் நாண் அனைத்தையும் அப் புள்ளி சமமாகப் பிரித்தால் அது கூம்பு வெட்டியின் மையமாகும்.

கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + gx + 2fy + c = 0. \qquad (1)$$
எனவும், இதன் மையம் ஆதி எனவும் கொண்டால் இக் கூம்பு வெட்டியின் (x_1, y_1) புள்ளிக்குத் தக $(-x_1, -y_1)$ புள்ளியும் கூம்பு வெட்டியில் இருத்தல் வேண்டும்.

எனவே, $ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0. \ldots(2)$

$$a(-x_1)^2 + 2h(-x_1)(-y_1) + b(-y_1)^2 + 2g(-x_1) + 2f(-y_1) + c = 0$$

(அ-து) $ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 - 2gx_1 - 2fy_1 + c = 0 \ldots(3)$
(3)-ஐ (2)-லிருந்து கழிக்கவே
$$gx_1 + fy_1 = 0.$$

(1)-ன் (x_1, y_1) புள்ளி அனைத்திற்கும் இத் தொடர்பு இருப்பதால் $g = 0$, $f = 0$ என்றிருத்தல் வேண்டும். எனவே, ஆதியை மையமாகக் கொண்ட கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாட்டில் x, y-ன் கெழுக்கள் சுன்னமாகும்.

7. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ கூம்புவெட்டி மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்.

இக் கூம்பு வெட்டியின் மையத்தின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

ஆயங்களின் போக்கினை மாற்றுது ஆதியை (x_1, y_1)-க்கு மாற்றினுல் கூம்பு வெட்டியின் புதுச் சமன்பாடு

$$a(X + x_1)^2 + 2h(X + x_1)(Y + y_1) + b(Y + y_1)^2 + 2g(X + x_1) + 2f(Y + y_1) + c = 0.$$

(அ-து) $aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2X(ax_1 + hy + g) + 2Y(hx_1 + by_1 + f) + ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \ldots(1)$

கூம்பு வெட்டியின் மையம் புதிய ஆதியாகையால் X, Y-ன் கெழுக்கள் சுன்னமாகும்.

$$\therefore \; ax_1 + hy_1 + g = 0 \qquad (2)$$

$$hx_1 + by_1 + f = 0 \qquad (3)$$

இச் சமன்பாடுகளை விடுவிக்கவே $x_1 = \dfrac{hf - bg}{ab - h^2}$, $y_1 = \dfrac{gh - af}{ab - h^2}$

$\therefore$ மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\dfrac{hf - bg}{ab - h^2}, \dfrac{gh - af}{ab - h^2}\right)$

குறிப்பு : $f(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ என்றால், மையத்தைக் கொடுக்கும் சமன்பாடுகள்

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

8. ஆதியை மையத்துக்கு மாற்றினால் கூம்புவெட்டியின் புதுச் சமன்பாடு.

முந்தின பகுதியில் ஆதியை மையத்துக்கு மாற்றக் கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு

$aX^2 + 2hXY + bY^2 + ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1$
$+ 2fy_1 + c = 0$ எனக் கண்டோம்.

$c_1 = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ எனக் கொண்டால்

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) + gx_1 + fy_1 + c \\ &= gx_1 + fy_1 + c \\ &= g.\ \frac{hf - bg}{ab - h^2} + f.\ \frac{gh - af}{ab - h^2} + c \\ &= \frac{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2}{ab - h^2} \end{aligned}$$

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ கோவையை Δ எனக் குறிப்பிடல் மரபு. எனவே $c_1 = \dfrac{\Delta}{ab - h^2}$.

$\therefore$ கூம்பு வெட்டியின் புதுச் சமன்பாடு

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + \frac{\Delta}{ab - h^2} = 0.$$

மாதிரி — 1.

பின்வரும் சமன்பாடுகள் எத்தகைய கூம்பு வெட்டியைக் குறிப்பன ? அவற்றின் நீள்வட்டம், அதிபரவளையங்களின் மையங்களைக் காண்க. மையத்துக்கு ஆதியை மாற்றினுல் கூம்பு வெட்டியின் புதுச் சமன்பாடு என்ன ?

(1) $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0.$

(2) $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0.$

(3) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 10y + 19 = 0.$

(1) சமன்பாட்டில் $a = 17, \quad h = -6, \quad b = 8.$

$h^2 = 36, \quad ab = 136 \qquad \therefore \; h^2 < ab.$

எனவே, (1) ஒரு நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கும். இதன் மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்.

$$34x - 12y + 46 = 0$$
$$-12x + 16y - 28 = 0$$

சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் கிடைக்கும்.

$\therefore$ மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் $(-1, 1)$. மையப் புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றினுல் கூம்பு வெட்டியின் புதுச்சமன்பாடு

$$17X^2 - 12\,XY + 8Y^2 + c_1 = 0.$$

இங்கு $c_1 = gx_1 + fy_1 + c.$

இப் பயிற்சியில் $g = 23,\; f = -14.\quad c = 17,\; x_1 = -1,\; y_1 = 1$

$$\therefore \; c_1 = 23(-1) + (-14)(1) + 17$$
$$= -20$$

$\therefore$ கூம்புவெட்டியின் புதுச் சமன்பாடு

$$17\,X^2 - 12XY + 8Y^2 - 20 = 0.$$

(2) சமன்பாட்டில் $a = 1, \quad h = -\frac{3}{2}, \quad b = 1, \quad g = 5, \quad f = -5$

$c = 21.$

$$ab = 1, \quad h^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \; h^2 > ab.$$

எனவே, (2) ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும். இதன் மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்

$$2x - 3y + 10 = 0$$

$-3x + 2y - 10 = 0$ சமன்பாடுகளால் காணலாம்: மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் $(-2, 2)$. ஆதியை $(-2, 2)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால் அதிபரவளையத்தின் புதுச் சமன்பாடு

$$X^2 - 3XY + Y^2 + c_1 = 0$$

இங்கு $c_1 = gx_1 + fy_1 + c$

$$= 5(-2) + (-5)2 + 21 = 1$$

∴ அதிபரவளையத்தின் புதுச் சமன்பாடு

$$X^2 - 3XY + Y^2 + 1 = 0.$$

(3) சமன்பாட்டில் $a = 9, \quad h = -12, \quad b = 16.$

$$\therefore \quad h^2 = 144, \qquad ab = 144.$$

எனவே, (3) ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

9. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ கூம்பு வெட்டி ஆயங்களின் நீளத்தையும் நிலையையும் காணல்.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1 \qquad \ldots \quad (1)$$

கூம்பு வெட்டியின் மையம் ஆதியாகும்.

ஆதி மையமும் r ஆரையும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

(அ-து) $$\frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1 \qquad \ldots \quad (2)$$

(1)-லிருந்து (2)-ஐக் கழித்தால், (1) கூம்பு வெட்டியும் (2) வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள், ஆதி இவை வழிச் செல்லும் இரு கோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அச் சமன்பாடு

$$\left(a - \frac{1}{r^2}\right)x^2 + 2hxy + \left(b - \frac{1}{r^2}\right)y^2 = 0. \ \ldots \quad (3)$$

இக் கோடுகள் ஒன்றுபட்டால் ஆயங்களுள் ஒன்றில் இருக்கும். கோடுகள் (3) ஒன்றுபடும் கட்டுப்பாடு

$$\left(a - \frac{1}{r^2}\right)\left(b - \frac{1}{r^2}\right) = h^2 \qquad \ldots \quad (4)$$

இது r^2-ன் இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

r^2-க்குக் கிடைக்கும் மதிப்பு இரண்டும், கூம்பு வெட்டி நீள் வட்டமாயின் மிகையாகவும், அதிபரவளையமாயின் ஒன்று மிகையாகவும், ஏனையது குறையாகவும் வரும்.

(4)-ன் தீர்வுகள் $r_1{}^2$, $r_2{}^2$ எனக் கொள்க.

$r_1{}^2, r_2{}^2$ மிகையாக இருப்பின் கூம்புவெட்டி நீள் வட்டமாகும். அதன் ஆயங்களின் நீளங்கள் $2r_1$, $2r_2$; $r_1{}^2$ மிகையாகவும், $r_2{}^2$ குறையாகவும் இருந்தால் கூம்புவெட்டி அதிபரவளையமாகும்.

குறுக்காயத்தின் நீளம் $= 2r_1$, துணையாயத்தின் நீளம் $= 2r_2$. ஆயங்களின் நிலையை எளிதிற் காணலாம்.

(4) ஐ (3)-ல் ஈடாக்கினால் ஆயங்களின் சமன்பாடு

$$\left(a - \frac{1}{r^2}\right) x^2 + 2hxy + \frac{h^2}{\left(a - \frac{1}{r^2}\right)} y^2 = 0$$

(அ-து) $$\left(a - \frac{1}{r^2}\right)^2 x^2 + 2h\left(a - \frac{1}{r^2}\right) xy + h^2y^2 = 0$$

(அ-து) $$\left\{\left(a - \frac{1}{r^2}\right) x + hy\right\}^2 = 0.$$

∴ $2r_1$ நீளமுடைய ஆயத்தின் சமன்பாடு

$$\left(a - \frac{1}{r_1{}^2}\right) x + hy = 0.$$

$2r_2$ நீளமுடைய ஆயத்தின் சமன்பாடு

$$\left(a - \frac{1}{r_2{}^2}\right) x + hy = 0.$$

ஆய நீளங்களிலிருந்து கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலைத் தகவினைக் காணலாம்.

10. பரவளையத்தின் நேரகலமும் ஆயமும்.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0. \quad (1)$$

ஒரு பரவளையத்தைக் குறித்தால் அதன் நேரகலத்தையும், அதன் ஆயச் சமன் பாட்டினையும் காணும் முறை பின் வருமாறு :—

(1) பரவளையத்தைக் குறித்தால் (1) சமன்பாட்டின் இரு படிகள் அடங்கிய உறுப்புகள் ஒரு கோவையின் இருபடியாகும்.

அக் கோவையை $\alpha x + \beta y$ எனக் கொண்டால் (1) சமன்பாட்டை

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (2)$$

என எழுதலாம்.

(x, y)-லிருந்து $\alpha x + \beta y = 0$ கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டு நீளத்தின் இருபடி (x, y) லிருந்து $2gx + 2fy + c = 0$ கோட்டுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டு நீளத்துக்குத்தக வேறுபடும் என (1) ஆல் காணலாம். ஆனால், $\alpha x + \beta y = 0, 2gx + 2fy + c = 0$ கோடுகள் இரண்டும் தம்முள் நேர்குத்தாக வேண்டுமென்பதில்லை.

(2) சமன்பாட்டை

$$(\alpha x + \beta y + \lambda)^2 = 2(\lambda\alpha - g)x + 2(\lambda\beta - f)y + \lambda^2 - c$$

என்று எழுதலாம்.

$$\alpha x + \beta y + \lambda = 0 \quad \dots (3)$$

$$2(\lambda\alpha - g)x + 2(\lambda\beta - f)y + \lambda^2 - c = 0 \quad \dots (4)$$

கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாக இருந்தால்

$$\alpha(\lambda\alpha - g) + \beta(\lambda\beta - f) = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad \lambda = \frac{\alpha g + \beta f}{\alpha^2 + \beta^2}$$

(2) சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{(\alpha x + \beta y + \lambda)^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)(\alpha^2 + \beta^2) =$$

$$2. \left\{\frac{(\lambda\alpha - g)x + (\lambda\beta - f)y + \frac{1}{2}(\lambda^2 - c)}{\sqrt{(\lambda\alpha - g)^2 + (\lambda\beta - f)^2}}\right\}$$

$$\times \sqrt{(\lambda\alpha - g)^2 + (\lambda\beta - f)^2}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \left(\frac{\alpha x + \beta y + \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)^2 = 2. \sqrt{\frac{(\lambda\alpha - g)^2 + (\lambda\beta - f)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)}}$$

$$\left\{\frac{(\lambda\alpha - g)x + (\lambda\beta - f)y + \frac{1}{2}(\lambda^2 - c)}{\sqrt{(\lambda\alpha - g)^2 + (\lambda\beta - f)^2}}\right\}$$

என்று எழுதலாம்.

∴ பரவளையத்தின் ஆயம் $\alpha x + \beta y + \lambda = 0$ முனையிடத்துத் தொடுவரை.

$$(\lambda\alpha - g)x + (\lambda\beta - f)y + \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - c) = 0$$

$$\text{நேரகலம்} = \frac{2\sqrt{(\lambda\alpha - g)^2 + (\lambda\beta - f)^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

λ-ன் மதிப்பை இதில் ஈடாக்க நேரகலத்தின் நீளம் $\dfrac{2(\alpha f - \beta g)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}$ என்று வரும்.

(2), (3) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் பரவளையத்தின் முனையின் ஆயத்தொலைகளைக் காணலாம்.

11. கூம்பு வெட்டி வரைதல்.

இருபடிச் சமன்பாட்டிருந்து கூம்பு வெட்டி வளை வரையை வரைய பின்வரும் முறையைக் கையாளல் நலம்.

முதலாவது அச் சமன்பாடு எத்தகைய கூம்பு வெட்டியைக் குறிப்பது எனக் காணவேண்டும். அது, பரவளையத்தைக் குறித்தால் முந்தின பகுதியிற் போல் அதன் ஆயம், முனையிடத்துத் தொடுவரை, நேரகலம் முதலியவற்றைக் காண்க.

அது ஒரு நீள் வட்டத்தையோ, ஒரு அதிபரவளையத்தையோ குறித்தால் அதன் மையத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க. மையத்துக்கு ஆதியை மாற்றிக் கூம்பு வெட்டியின் புதுச்சமன்பாடு கண்டு, அதனால் கூம்பு வெட்டி ஆயங்களின் நீளங்களையும் நிலையையும் காண்க.

கூம்பு வெட்டிகள் ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகளையும் காண்க. இவற்றால், கூம்பு வெட்டியின் வளைவரையை ஏறக்குறைய வரையலாம்.

மாதிரி 2.

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 44x + 108y - 124 = 0$$

கூம்பு வெட்டியை வரைக.

இங்கு $a = 9$, $h = 12$, $b = 16$

∴ $h^2 = ab$.

எனவே, இது ஒரு பரவளையமாகும்.

முதல் முறை :

இச் சமன்பாட்டை

$(3x + 4y)^2 = 44x - 108y + 124$ என்று எழுதலாம்.

(அ-து) $(3x + 4y + \lambda)^2 = 2x(22 + 3\lambda)$
$+ 4y(-27 + 2\lambda) + \lambda^2 + 124$ என்று எழுதலாம்.

$$3x + 4y + \lambda = 0$$

$$2(22 + 3\lambda)x + 4(-27 + 2\lambda)y + \lambda^2 + 124 = 0$$

கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாயின்

$$6(22 + 3\lambda) + 16(-27 + 2\lambda) = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = 6.$$

$\therefore$ சமன்பாடு $(3x + 4y + 6)^2 = 20(4x - 3y + 8)$
என்று வரும்.

(அ-து) $\left(\frac{3x + 4y + 6}{5}\right)^2 . 25 = 20 \frac{4x - 3y + 8}{5} . 5$

(அ-து) $\left(\frac{3x + 4y + 6}{5}\right)^2 = 4.\frac{4x - 3y + 8}{5}$ ... (1)

$\therefore$ பரவளையத்தின் ஆயம் $3x + 4y + 6 = 0$

முனையிடத்துத் தொடுவரை $4x - 3y + 8 = 0$.

நேரகலத்தின் நீளம் 4

வளைவரையை வரைய $3x + 4y + 6 = 0$ ஆயத்தையும், முனையிடத்துத் தொடுவரை $4x - 3y + 8 = 0$-யும் வரைக. இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி A முனை. இக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் A-ன் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

A-ன் ஆயத்தொலைகள் $(-2, 0)$

பரவளையச் சமன்பாட்டில் எண்ணுறுப்புக் குறையானதால் ஆதி பரவளையத்தின் உள் இருத்தல்வேண்டும்.

ஆயம் வழியாக மிகைப் போக்கில் $AS = 1$ என்று இருக்க S புள்ளியைக் காண்க.

S வழி LSL' நேரகலத்தை வரைக. இங்கு $SL = SL' = 2$ பரவளையம் ஆயத்தொலை ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

பரவளையச் சமன்பாட்டில் $y = 0$-ஐ ஈடாக்கினால்

$$9x^2 - 44x - 124 = 0.$$

$$(9x - 62)(x + 2) = 0.$$

$\therefore$ பரவளையம் x ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள்

$$\left(\frac{62}{9}, 0\right), (-2, 0)$$

பரவளையச் சமன்பாட்டில் $x = 0$-ஐ ஈடாக்கினால்

$$16y^2 + 108y - 124 = 0$$

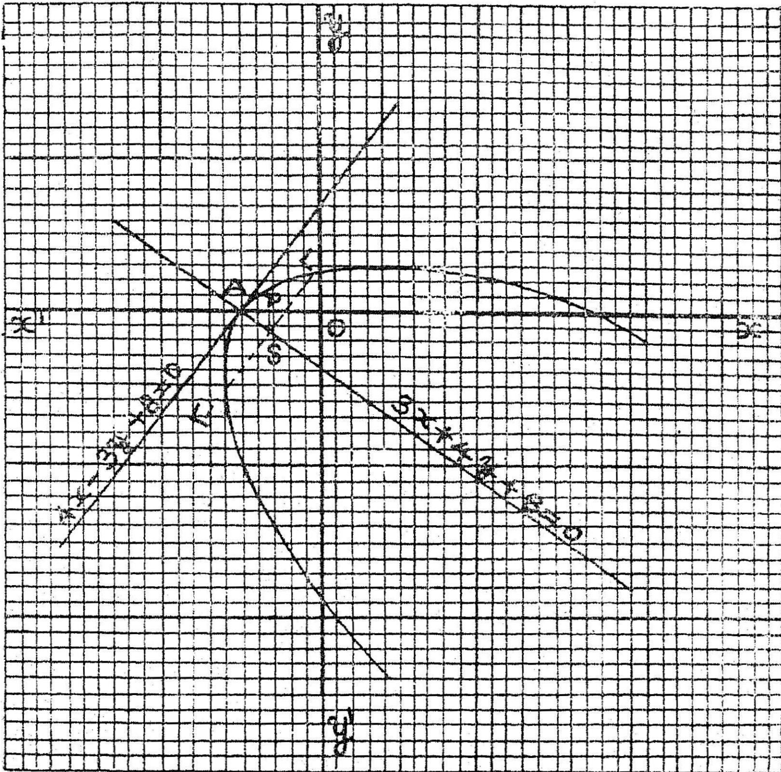
(அ-து) $4y^2 + 27y - 31 = 0$

(அ-து) $(4y + 31)(y - 1) = 0$

$\therefore$ பரவளையம் y ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள்

$$\left(0, -\frac{31}{4}\right), \ (0, 1)$$

எனவே, L, L', A, $\left(\frac{62}{9}, 0\right)$, $(-2, 0)$, $\left(0, -\frac{31}{4}\right)$, $(0, 1)$ புள்ளிகள் வழி பரவளையத்தை வரையலாம். அதன் உருவம் பின்வருமாறு :



படம்-139

S-லிருந்து SP-ஐ x ஆயத்துக்கு நேர்க்குத்தாக வரைந்தால் S-ன் ஆயத்தொலைகள் (— PO, — SP)

பரவளைய ஆயத்தின் சாய்வு வீதம் $= -\frac{3}{4}$

$$\tan\theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{3}{5},\ \cos\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} AP &= AS\cos(180^\circ - \theta) \\ &= -AS\ \cos\theta \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SP &= AS\sin(180^\circ - \theta) \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$\therefore$ S-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

இரண்டாவது முறை :

பரவளையத்தின் சமன்பாட்டினை

$(3x + 4y)^2 - 44x + 108y - 124 = 0$ என்று எழுதலாம்.

$3x + 4y = 0$ புது x ஆயமாக எடுத்தால் (அ-து) $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ என்றிருக்கப் பழைய ஆயத்தை θ கோணம் சுற்றினால் $\frac{\sin\theta}{3} = \frac{\cos\theta}{-4} = \frac{1}{5}$.

ஆயங்களை மாற்றும் வாய்ப்பாடு

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \frac{-4X - 3Y}{5}$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \frac{3X - 4Y}{5}$$

எனவே, புது ஆயங்களைப் பொறுத்த கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு

$$\left\{\frac{3(-4X - 3Y)}{5} + 4\frac{(3X - 4Y)}{5}\right\}^2 - 44\left(\frac{-4X - 3Y}{5}\right)$$

$$+ 108\ \frac{(3X - 4Y)}{5} - 124 = 0.$$

(அ-து) $25Y^2 + 100X - 60Y - 124 = 0.$

(அ-து) $Y^2 - \frac{12}{5}Y = -4X + \frac{124}{25}.$

$$\left(Y - \frac{6}{5}\right)^2 = -4X + \frac{124}{25} + \frac{36}{25}.$$

$$= -4\left(X - \frac{8}{5}\right)$$

ஆதியை $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால்

$Y'^2 = -4X'.$

∴ பரவளையத்தின் நேரகலம் = 4.

பரவளையத்தின் முனையிடத்துத் தொடுவரை $X' = 0.$

$$X' \equiv X - \frac{8}{5}.$$

$$\equiv x\cos\theta + y\sin\theta - \frac{8}{5}.$$

$$\equiv x\left(-\frac{4}{5}\right) + y\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{8}{5}.$$

$$\equiv \frac{-4x + 3y - 8}{5}.$$

∴ முனையிடத்துத் தொடுவரை $-4x + 3y - 8 = 0.$

பரவளையத்தின் ஆயம் $Y' = 0.$

$$Y' \equiv Y - \frac{6}{5}$$

$$\equiv -x\sin\theta + y\cos\theta - \frac{6}{5}.$$

$$\equiv -x\frac{3}{5} + y\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{6}{5}.$$

$$\equiv -\frac{3x + 4y + 6}{5}.$$

∴ பரவளையத்தின் ஆயம் $3x + 4y + 6 = 0.$

∴ பரவளையத்தின் முனை $(-2, 0).$

பரவளையம் ஆயத்தொலை ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க. முந்தின முறைப்படி பரவளையத்தை வரைக.

மாதிரி 3:

$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 26y + 29 = 0$ கூம்பு வெட்டியை வரைக.

இங்கு $a = 5$, $b = 5$, $c = 29$, $h = -3$, $g = 11$, $f = -13$.

I. $ab = 25$, $h^2 = 9$, $\therefore$ $h^2 < ab$. எனவே இக் கூம்பு வெட்டி நீள்வட்டமாகும்.

II. நீள் வட்டத்தின் மையம் (x_1, y_1)

$$5x_1 - 3y_1 + 11 = 0.$$

$-3x_1 + 5y_1 - 13 = 0$ சமன்பாடுகளால் காணலாம்.

$$\therefore \quad x_1 = -1, \quad y_1 = 2$$

$\therefore$ நீள்வட்டத்தின் மையம் $(-1, 2)$.

III. ஆயத்தொலை ஆயங்களின் போக்கினை மாற்றாது ஆதியை மையத்துக்கு மாற்றினால் நீள்வட்டத்தின் புதுச் சமன்பாடு

$$5X^2 - 6XY + 5Y^2 + c_1 = 0$$

இங்கு $x = X - 1$, $y = Y + 2$

$$\begin{aligned} c_1 &= gx_1 + fy_1 + c \\ &= 11(-1) - 13(2) + 29 \\ &= -8. \end{aligned}$$

$\therefore$ நீள்வட்டத்தின் புதுச் சமன்பாடு

$$5X^2 - 6XY + 5Y^2 = 8$$

$$(அ\text{-}து) \quad \frac{5}{8}X^2 - \frac{6}{8}XY + \frac{5}{8}Y^2 = 1$$

IV. $X^2 + Y^2 = r^2$ வட்டமும் நீள்வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நீள்வட்ட விட்டங்களின் சமன்பாடு

$$\frac{5}{8}X^2 - \frac{6}{8}XY + \frac{5}{8}Y^2 = \frac{X^2 + Y^2}{r^2}.$$

$$(அ\text{-}து) \quad \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r^2}\right)X^2 - \frac{3}{4}XY + \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r^2}\right)Y^2 = 0$$

இவ் விட்டங்கள் ஒன்றுபட்டால்

$$\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r^2}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)^2.$$

(அ-து) $\frac{5}{8} - \frac{1}{r^2} = \pm \frac{3}{8}$,

$$\therefore \quad \frac{1}{r^2} = \frac{5}{8} \pm \frac{3}{8}$$

$= 1$ அல்லது $\frac{1}{4}$

$\therefore \quad r^2 = 4$ அல்லது 1

$\therefore$ அரை நெட்டச்சு $r_1 = 2$

அரை குற்றச்சு $r_2 = 1$

அரை நேரகலம் $= \frac{r_2^2}{r_1} = \frac{1}{2}$.

V. நெட்டச்சின் சமன்பாடு $\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r_1^2}\right) X - \frac{3}{8} Y = 0$

(அ-து) $\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right) X - \frac{3}{8} Y = 0$

(அ-து) $X - Y = 0$.

பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து நெட்டச்சின் சமன்பாடு

$$(x + 1) - (y - 2) = 0.$$

(இ-து) $x - y + 3 = 0$.

குற்றச்சின் சமன்பாடு $\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r_2^2}\right) X - \frac{3}{8} Y = 0$.

(அ-து) $\left(\frac{5}{8} - 1\right) X - \frac{3}{8} Y = 0$

(அ-து) $X + Y = 0$.

$\therefore$ பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து குற்றச்சின் சமன்பாடு.

$x + 1 + y - 2 = 0$.

(அ-து) $x + y = 1$.

VI. வளைவரை x ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் காணச் சமன்பாட்டில் $y = 0$-ஐ ஈடாக்கல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad 5x^2 + 22x + 29 = 0.$$

இச் சமன்பாட்டுக்குக் கற்பனைத் தீர்வுகள்தாம் உண்டு. ஆகையால் வளைவரை x ஆயத்தை வெட்டாது. வளைவரை y ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் காணச் சமன்பாட்டில் $x = 0$-ஐ ஈடாக்கல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad 5y^2 - 26y + 29 = 0.$$

$\therefore \quad y = 3{\cdot}6$ அல்லது $1{\cdot}6$ (அண்ணளவாக)

VII. வளைவரை வரைய முதலில் $x - y + 3 = 0$ நெட்டச்சு, $x + y = 1$ குற்றச்சுக் கோடுகளை வரைக. இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $(-1, 2)$. இது நீள்வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.

நெட்டச்சில் $CA = CA' = 2$ என்றிருக்க A, A′ புள்ளிகளையும், குற்றச்சில் $CB = CB' = 1$ என்றிருக்க B, B′ புள்ளிகளையும் எடுக்க.

$$r_2^2 = r_1^2\,(1 - e^2)$$

(அ-து) $\quad 1 = 4\,(1 - e^2)$

$$\therefore \quad e = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$CS = r_1 e = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}; \quad CS' = \sqrt{3}.$$

நெட்டச்சில் S, S′ புள்ளிகளைக் கண்டு அவற்றுவழி LSL_1 $L'S'L_1'$, நேரகலங்களை வரைக.

y ஆயத்தில் E $(0, 3{\cdot}6)$, F $(0, 1{\cdot}6)$ புள்ளிகளைக் காண்க

A, E, L, B, L′, A′, L_1', B′, F, L_1, புள்ளிகள் வழி நீள் வட்டத்தை வரைக. [படம் 140-ஐப் பார்க்கவும்]

பிறிதொரு முறை :—

ஆதியை நீள்வட்டத்தின் மையத்துக்கு மாற்றினால் நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு $5X^2 - 6XY + 5Y^2 = 8$

$\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a - b}$ என்றிருக்க ஆயங்களை θ கோணம் சுற்றுக.

$$\tan 2\theta = \infty \qquad \therefore \quad \theta = 45^\circ$$

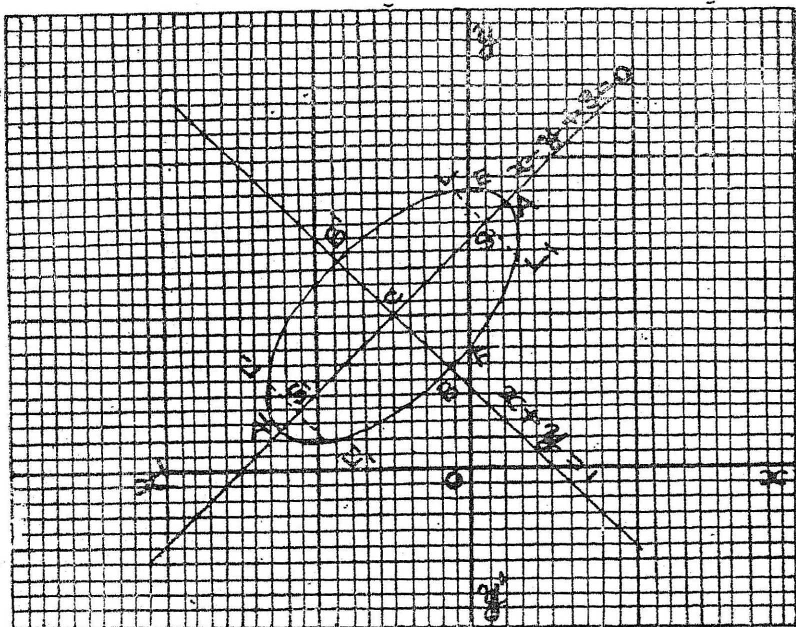
$$X = x' \cos\theta - y' \sin\theta = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

$$Y = x' \sin\theta + y' \cos\theta = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$5\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$$

(அ-து) $2x'^2 + 8y'^2 = 8$



படம்-140

(அ-து) $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$

$\therefore$ அரை நெட்டச்சின் நீளம் $= 2$

அரைக் குற்றச்சின் நீளம் $= 1$

நெட்டச்சின் சமன்பாடு $y' = 0$

$$y' = -X\sin\theta + Y\cos\theta$$
$$= \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-(x+1)+(y-2)}{\sqrt{2}}$$
$$\times \frac{-x+y-3}{2}$$

∴ நெட்டச்சின் சமன்பாடு $x - y + 3 = 0$

குற்றச்சின் சமன்பாடு $x' = 0$

$$x' = X\cos\theta + Y\sin\theta$$
$$= \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(x+1)+(y-2)}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{x+y-1}{\sqrt{2}}$$

∴ குற்றச்சின் சமன்பாடு $x + y - 1 = 0$

நீள்வட்டம், ஆயத்தொலை ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகள், அதிபரவளையத்தின் முனைகள் A, A', முதலியவற்றை முந்தின முறை போல் கண்டு வளைவரையை வரைக.

மாதிரி 4.

$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ கூம்பு வெட்டியின் உயிர்ப் புள்ளிகளையும் மையத் தொலைத் தகவையும் காண்க. கூம்பு வெட்டியை வரைக.

இங்கு $a=1$, $h=2$, $b=1$, $g=-1$, $f=1$, $c=-6$.

I. $ab = 1$, $h^2 = 4$

∴ $h^2 > ab$.

எனவே, கூம்புவெட்டி அதிபரவளையமாகும்.

II. அதிபரவளையத்தின் மையம் (x_1, y_1) $x_1 + 2y_1 - 1 = 0$ $2x_1 + y_1 + 1 = 0$ சமன்பாடுகளால் காணலாம். இச் சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $x_1 = -1, y_1 = 1$.

∴ அதிபரவளையத்தின் மையம் $(-1, 1)$

III. ஆயத்தொலை ஆயங்களின் போக்கினை மாற்றுது ஆதியை மையத்துக்கு மாற்றினால் அதிபரவளையத்தின் புதுச் சமன்பாடு.

$$X^2 + 4XY + Y^2 + c_1 = 0$$

இங்கு $x = X - 1, \quad y = Y + 1$

$$c_1 = gx_1 + fy_1 + c$$
$$= (-1)(-1) + (1)(1) - 6$$
$$= -4$$

∴ அதிபரவளையத்தின் புதுச் சமன்பாடு

$$X^2 + 4XY + Y^2 = 4$$

(அ-து) $\frac{1}{4}X^2 + XY + \frac{1}{4}Y^2 = 1.$

IV. $X^2 + Y^2 = r^2$ வட்டம், அதிபரவளையம் இவற்றின் பொது நாண்களின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$\frac{1}{4}X^2 + XY + \frac{1}{4}Y^2 = \frac{X^2 + Y^2}{r^2}$$

(அ-து) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{r^2}\right)X^2 + XY + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{r^2}\right)Y^2 = 0$

இந் நாண்கள் ஒன்றுபட்டால்

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{r^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

(அ-து) $\frac{1}{4} - \frac{1}{r^2} = \pm\frac{1}{2}$

(அ-து) $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4}$ அல்லது $-\frac{1}{4}$

∴ $r^2 = \frac{4}{3}$ அல்லது $-4.$

∴ அரைக் குறுக்காயம் $r_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

அரைத் துணையாயம் $r_2 = 2$

அரை நேரகலம் $= \frac{r_2^2}{r_1} = 2\sqrt{3}$

V. குறுக்காயச் சமன்பாடு

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{r_1^2}\right)X + \frac{1}{2}Y = 0$$

$$(\text{அ-து}) \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) X + \frac{1}{2} Y = 0$$

$$(\text{அ-து}) \ X - Y = 0$$

முதல் ஆயத்தொலை ஆயங்களைப் பொறுத்துக் குறுக்காயத்தின் சமன்பாடு $(x + 1) - (y - 1) = 0$

$$(\text{அ-து}) \quad x - y + 2 = 0.$$

துணையாயச் சமன்பாடு

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{r_2^2}\right) X + \frac{1}{2} Y = 0$$

$$(\text{அ-து}) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) X + \frac{1}{2} Y = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad X + Y = 0.$$

முதல் ஆயத்தொலை ஆயங்களைப் பொறுத்துத் துணையாயத்தின் சமன்பாடு $(x + 1) + (y - 1) = 0$

$$x + y = 0.$$

VI. அதிபரவளையம் x ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் காணச் சமன்பாட்டில் $y = 0$-ஐ ஈடாக்கல் வேண்டும்.

$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$\therefore \quad x = 3 \cdot 7 \text{ அல்லது } - 1 \cdot 7 \text{ (அண்ணளவாக)}.$$

வளைவரை y ஆயத்தை வெட்டும்புள்ளிகள் காணச் சமன்பாட்டில் $x = 0$-ஐ ஈடாக்கல் வேண்டும்.

$$y^2 + 2y - 6 = 0.$$

$$y = - 3 \cdot 7 \text{ அல்லது } 1 \cdot 7 \text{ (அண்ணளவாக)}$$

VII. வளைவரையை வரைய முதலில் $x - y + 2 = 0$ குறுக்காயத்தையும், $x + y = 0$ துணையாயத்தையும் வரைக. இக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி அதிபரவளையத்தின் மையம் $(-1, 1)$ ஆகும்.

குறுக்காயத்தில் $CA = CA' = \frac{2}{\sqrt{3}}$ என்றிருக்க A, A' புள்ளிகளைக் காண்க.

$$r_2^2 = r_1^2 (e^2 - 1)$$

$$4 = \frac{4}{3}(e^2 - 1)$$

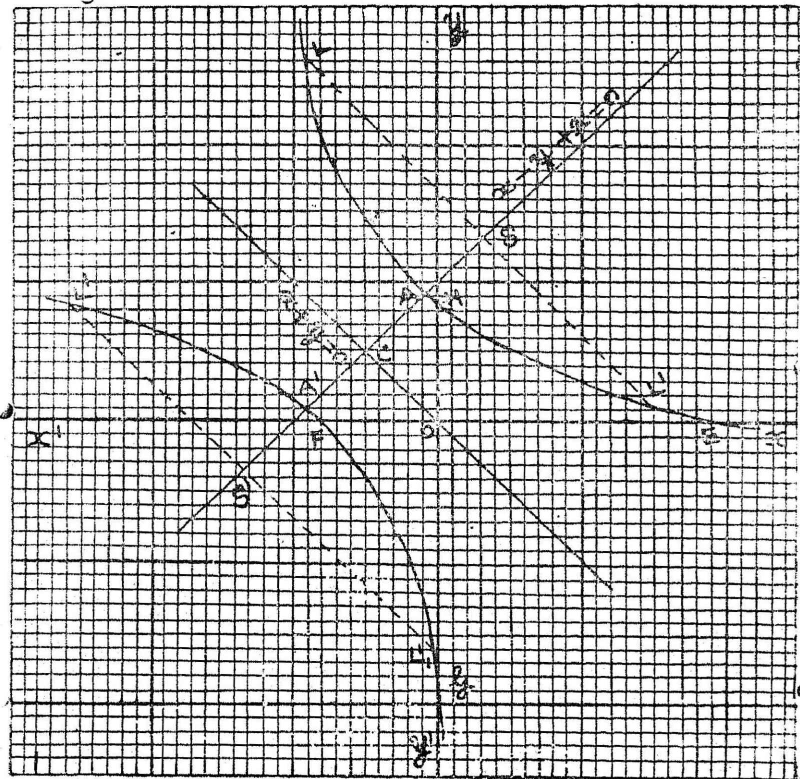
$$e^2 = 4$$

$$\therefore \quad e = 2.$$

$$\therefore \quad CS = CS' = ae = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

குறுக்காயத்தில் $CS = CS' = \frac{4}{\sqrt{3}}$ என்றிருக்க S, S′ புள்ளிகளை எடுத்தால் S, S′ புள்ளிகள் உயிர்ப் புள்ளிகளாகும்

S, S′ புள்ளிகள் வழி LSL′, $L_1S'L_1'$, நேரகலங்கள் வரைக. x ஆயத்தில் E (3·7, 0), F (— 1·7,0) புள்ளிகளையும் y ஆயத்தில் G (0, — 3·7), H (0, 1·7) புள்ளிகளையும் காண்க. படத்தில் $L'S'L_1'$ என்பதை $L_1S'L_1'$ எனக்கொள்க.



படம் - 141

குறுக்காயச் சமன்பாடு $x - y + 2 = 0$

$\therefore$ அதன் சாய்வு வீதம் $= 1$

குறுக்காயத்தில் S, S′ புள்ளிகள் C-லிருந்து $\frac{4}{\sqrt{3}}$ தொலையில் இருக்கும்.

∴ உயிர்ப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(-1 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 1 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(அ-து) $\left(-1+2\sqrt{\frac{2}{3}},\ 1+2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$,

$$\left(-1-2\sqrt{\frac{2}{3}},\ 1-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

பிறிதொரு முறை—

ஆதியை மையத்துக்கு மாற்றினால் அதிபரவளையத்தின் புதுச்சமன்பாடு

$$X^2 + 4XY + Y^2 = 4$$

$\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b}$ என்றிருக்க ஆயங்களை θ கோணம் சுற்றுக.

$h = 2,\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ \tan 2\theta = \infty$

$\therefore\ \theta = 45°$

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

$$X = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$$

$$Y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4$$

(அ-து) $3x'^2 - y'^2 = 4$

(அ-து) $\dfrac{x'^2}{\frac{4}{3}} - \dfrac{y'^2}{\frac{4}{1}} = 1$

(அ-து) $\dfrac{x'^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} - \dfrac{y'^2}{2^2} = 1$

$\therefore$ அரைக் குறுக்காயம் $= \frac{2}{\sqrt{3}}$

அரைத் துணையாயம் $= 2$

துணையாயச் சமன்பாடு $x' = 0$

$\therefore \quad x' = X\cos\theta + Y\sin\theta$

$$= \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(x+1) + (y-1)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ துணையாயச் சமன்பாடு $x + y = 0$

குறுக்காயச் சமன்பாடு $y' = 0$

$$y' = -X\sin\theta + Y\cos\theta$$

$$= \frac{-X + Y}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-(x+1) + (y-1)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-x + y - 2}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ குறுக்காயச் சமன்பாடு $x - y + 2 = 0.$

அதிபரவளையம் ஆயத்தொலை ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகள் அதிபரவளையத்தின் முனைகள் முதலியவற்றை முந்தின முறை போல் கண்டு வளைவரையை வரைக.

பயிற்சிகள் 24.

பின்வரும் கூம்பு வெட்டிகளை வரைக :

(1) $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0.$

(2) $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0.$

(3) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 86x + 52y - 139 = 0.$

(4) $8x^2 + 12xy + 17y^2 + 4x - 22y - 7 = 0.$

(5) $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 48x - 48y = 0.$

(6) $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 476x - 1494y + 1414 = 0.$

(7) $43x^2 + 48xy + 57y^2 + 10x + 180y + 25 = 0.$

(8) $(x + y - 1)(x - 7y - 9) = 2.$

(9) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 40x + 220y - 700 = 0$

(10) $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0$

(11) $7x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 6y - 9 = 0$

(12) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - y + 4 = 0$

(13) $x^2 - xy + y^2 + 4x - 5y - 2 = 0$

(14) $x^2 - 4xy^2 - 2y^2 + 10x + 4y = 0$

(15) $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 2x - 29y - 1 = 0$

16. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$ பரவளையத்தின் ஆயம், முனை, நேரகலம், உயிர்ப் புள்ளியைக் காண்க.

17. $x^2 + 12xy - 4y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ கூம்பு வெட்டியின் உயிர்ப்புள்ளிகளையும், உயிர்க் கோடுகளையும் காண்க.

18. $55x^2 - 30xy + 39y^2 - 40x - 24y - 464 = 0$ கூம்பு வெட்டியின் உயிர்ப் புள்ளிகளைக் காண்க.

19. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 80x - 140y + 100 = 0$ பரவளையத்தின் உயிர்ப்புள்ளியைக் காண்க.

20. $81x^2 + 90xy + 25y^2 + 59x + 21y + 50 = 0$ பரவளையத்தின் உயிர்ப் புள்ளியையும், உயிர்க் கோட்டினையும் காண்க.

21. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ கூம்பு வெட்டியின் ஆயங்களின் சமன்பாடு $xy(a - c) = b(x^2 - y^2)$ என்று நிறுவுக.

22. $3x^2 \pm 2xy + 3y^2 = 8$ கூம்பு வெட்டிகளுள் ஒன்றின் உயிர்ப் புள்ளிகள் ஏனையதில் இருக்கும் என நிறுவுக.

23. $(x - 2y + 1)^2 + (4x + 2y - 3)^2 = 10$ கூம்பு வெட்டியின் ஆயங்கள் தம் பெருக்கத் தொகை 4 என நிறுவுக.

பகுதி 3 பொதுப்படைக் கூம்புவெட்டி (General Conic)

12. குறித்த 5 புள்ளிகள் வழி ஒரு கூம்பு வெட்டிதான் செல்லும். பொதுப்படைச் சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும் என நிறுவினோம். இச் சமன்பாட்டில் 6 நிலையெண்கள் இருப்பினும், அதனுள், ஒரு நிலையெண்ணால் சமன்பாட்டை வகுத்தால் சமன்பாட்டில் தம்முள் தொடர்பில்லாத 5 நிலையெண்களே இருக்கும். இவ் வைந்து நிலையெண்களைக் காணத் தம்முள் தொடர்பில்லாத 5 சமன் பாடுகள் வேண்டும் எனவே, ஒரு கூம்பு வெட்டியைத்

தம்முள் தொடர்பில்லாத 5 கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணைக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக 3 குறித்த புள்ளிகள் வழி ஒரு கூம்பு வெட்டியைச் செல்லும்படி செய்யலாம்.

13. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c=0$ கூம்பு வெட்டியின் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை.

(x_1, y_1) வழிச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots (1)$$

இக்கோடு கூம்பு வெட்டியை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காணக் கூம்புவெட்டிச் சமன்பாட்டில்

$x = x_1 + r\cos\theta$, $y = y_1 + r\sin\theta$-ஐ ஈடாக்கல் வேண்டும்.

$$\therefore \; a(x_1 + r\cos\theta)^2 + 2h(x_1 + r\cos\theta)(y_1 + r\sin\theta)$$
$$+ b(y_1 + r\sin\theta)^2 + 2g(x_1 + r\cos\theta) + 2f(y_1 + r\sin\theta) + c = 0.$$

(அ-து) $r^2 \{a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta\}$
$+ 2r\{(ax_1 + hy_1 + g)\cos\theta + (hx_1 + by_1 + f)\sin\theta\} +$
$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad (2)$

(1) கோடு கூம்புவெட்டியைத் தொட்டால் (x_1, y_1)லிருந்து, (1) கோடு கூம்பு வெட்டியை வெட்டும் புள்ளிகளின் தொலைகள் சுன்னமாகும்.

எனவே, (2)-ன் தீர்வுகள் இரண்டும் சுன்னமாகும்.

$$\therefore \; ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \ldots (3)$$
$$(ax_1 + hy_1 + g)\cos\theta + (hx_1 + by_1 + f)\sin\theta = 0.$$
$$\therefore \; \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{hx_1 + by_1 + f}{ax_1 + hy_1 + g} \quad \ldots (4)$$

இம் மதிப்பை (1)-ல் ஈடாக்கினால் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை கிடைக்கும்.

(x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= -\frac{hx_1 + by_1 + f}{ax_1 + hy_1 + g}$$

(அ-து) $(x-x_1)(ax_1+hy_1+g)$
$+(y-y_1)(hx_1+by_1+f)=0.$

(அ-து) $axx_1+h(xy_1+yx_1)+byy_1+gx+fy$
$=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+gx_1+fy_1.$

இருபுறத்தும் gx_1+fy_1+c ஐக் கூட்டினால்

$$axx_1+h(xy_1+yx_1)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$$
$$=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c.$$

(அ-து) $axx_1+h(xy_1+yx_1)+byy_1+g(x+x_1)+f$
$(y+y_1)+c=0$
$\therefore$ { 3)-ஆல் }

இச் சமன்பாட்டை T = 0 என்று எழுதுவதும் உண்டு.

14. (x_1, y_1)-ன் துணைக்கோட்டுச் சமன்பாடு.

$axx_1+h(xy_1+yx_1)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ என்றும், (x_1, y_1)-லிருந்து கூம்பு வெட்டிக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் தொடு நாண் $axx_1+h(xy_1+yx_1)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ என்றும் எளிதிற் காணலாம்

15. (x_1, y_1) புள்ளியை நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ கூம்பு வெட்டியின் நாண். (x_1, y_1) வழிச் செல்லும் நாணின் சமன்பாடு.

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r \qquad (1)$$

எனக் கொள்க.

இந் நாண் கூம்பு வெட்டியை வெட்டும் புள்ளிகளைப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் காணலாம்.

$$r^2(a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta)$$
$$+2r\{(ax_1+hy_1+g)\cos\theta+(hx_1+by_1+f)\sin\theta\}$$
$$+ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \quad \dots \quad (2)$$

(x_1, y_1), நாணின் நடுப் புள்ளியாதலால் (2)-ன் தீர்வுகள் மாறுபட்ட குறியும் சம மதிப்பும் உடையனவாகும்.

$$\therefore \quad (ax_1+hy_1+g)\cos\theta+(hx_1+by_1+f)\sin\theta=0 \quad (3)$$

(1), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து θ-வை அகற்றினால் நாணின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$\therefore$ நாணின் சமன்பாடு

$$(x-x_1)(ax_1+hy_1+g)+(y-y_1)(hx_1+by_1+f)=0.$$

(அ-து) $axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + gx + fy$
$$= ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + gx_1 + fy_1$$

இருபுறத்தும் $gx_1 + fy_1 + c$-ஐக் கூட்டினுல்

$$axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c.$$

(அ-து) $T = S_1$

16. ஒரு போகு நாண்களின் நடுப்புள்ளியினது இயங்கு வரை மையம் வழிச் செல்லும் ஒரு கோடாகும்.

நாண்கள் $lx + my = 0$-க்கு ஒருபோகாக இருக்குமெனக் கொள்வோம்.

அத்தகைய நாண் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொண்டால் அதன் சமன்பாடு

$$axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = S_1$$

(அ-து) $x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) + \dots\dots = 0.$
இக்கோடு $lx + my = 0$-க்கு ஒரு போகாக இருப்பதால்

$$\frac{ax_1 + hy_1 + g}{l} = \frac{hx_1 + by_1 + f}{m}$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$\frac{ax + hy + g}{l} = \frac{hx + by + f}{m}$$

இக் கோட்டில் $ax + hy + g = 0$, $hx + by + f = 0$ இணங்குமாகையால் கூம்பு வெட்டியின் மையம் வழி இக் கோடு செல்லும்.

17. $y = mx$, $y = m_1x$ கோடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ கூம்புவெட்டியின் இருதுணை இய விட்டங்களுக்கு ஒருபோகாக இருந்தால் $a + h(m + m_1) + bmm_1 = 0$.

$y = mx$ கோட்டுக்கு ஒரு போகான நாண் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

அந் நாணின் சமன்பாடு

$$axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

(அ-து) $x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) + \ldots\ldots = 0.$

இந்நாணின் ' m' $= -\dfrac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f}$

$\therefore$ $y = mx$ க்கு ஒருபோகான நாண்களின் நடுப்புள்ளி

இயங்குவரை $m = -\dfrac{ax + hy + g}{hx + by + f}$.

(அ-து) $(a + mh)\, x + (h + mb)\, y + g + mf = 0.$
இக்கோடு $y = m_1 x$ க்கு ஒருபோகானல்

$$-\frac{a + mh}{h + mb} = m_1$$

(அ-து) $a + h\,(m + m_1) + b\,m\,m_1 = 0.$

18. இரு கூம்பு வெட்டிகள் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.
இரு கூம்பு வெட்டிகளின் பொதுப்படைச் சமன்பாடுகளை

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$a_1 x^2 + 2h_1 xy + b_1 y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$
எனக் கொள்வோம்.

இச் சமன்பாடுகளை

$$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$B_0 y^2 + B_1 y + B_2 = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

என எழுதலாம்.
இங்கு A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, x-ன் சார்புகளாகும்.

(1), (2) சமன்பாடுகளால்

$$\frac{y^2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = \frac{y}{A_2 Bo - B_2 Ao} = \frac{1}{Ao B_1 - Bo A_1} \quad (3)$$

$$\therefore \quad (A_2Bo - B_2Ao)^2 = (A_1B_2 - A_2B_1)(A_0B_1 - B_0A_1)$$

இச் சமன்பாடு x-ன் நாற்படிச் சமன்பாடாகும். எனவே, இதற்கு நான்கு தீர்வுகள் உள.

$$(3) \text{ - ஆல் } y = \frac{A_2\, Bo - B_2\, Ao}{Ao\, B_1 - Bo\, A_1}$$

x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்குத்தக y-க்கு ஒரு மதிப்பு உண்டு. எனவே, இவ்விரு கூம்பு வெட்டிகள் நான்கு புள்ளிகளில்

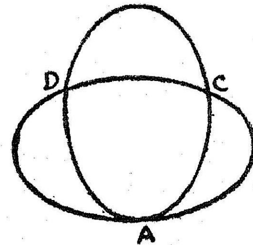
வெட்டும். (3) சமன்பாட்டில் கற்பனைத் தீர்வுகள் இரட்டையாக வருவதால் இந் நாற்புள்ளிகளும் மெய்யாகவோ, கற்பனை யாகவோ அல்லது இரண்டு மெய்யாகவும் இரண்டு கற்பனை யாகவுமோ இருக்கும்.

19. கூம்பு வெட்டிகளின் தொடுகை :

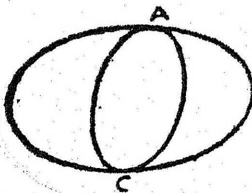
S, S′ கூம்பு வெட்டிகள் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும் என்று பார்த்தோம். அப் புள்ளிகள் அனைத்தும் மெய்யென்றும் அவற்றை A, B C, D என்றும் கொள்க. இவற்றுள் இரண்டு அல்லது மூன்று புள்ளிகள் ஒன்று படவும் கூடும்.

A, B புள்ளிகள் A புள்ளியில் ஒன்றுபடும் என்றும், C. D புள்ளிகள் தனித்தனியாக இருக்குமென்றும் கொள்வோம். இந் நிலையில் கூம்புவெட்டிகள் A இடத்துத் தொடும். இம் மாதிரி தொடுதல் ஒற்றைத் தொடுகை (Single Contact) எனப்படும். (படம் 142)

A, B புள்ளிகள் A-லும், C, D புள்ளிகள் C லும் ஒன்றுபட்டால் கூம்பு வெட்டிகள் A, C புள்ளிகளிடத்துத் தொடும். இம்மாதிரி தொடுதல் இரட்டைத் தொடுகை (Double Contact) எனப்படும். (படம் 143)



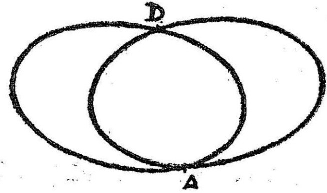
படம் 142



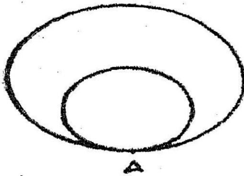
படம் 143

A, B, C புள்ளிகள் A-ல் ஒன்று பட்டால் கூம்பு வெட்டிகளின் தொடுகை முப்புள்ளித் தொடுகை (Three Point Contact) எனப்படும். (படம் 144)

A, B, C, D புள்ளிகள் A-ல் ஒன்றுபட்டால் கூம்பு வெட்டிகளின் தொடுகை நாற்புள்ளி தொடுகை Four Point Contact) எனப்படும். (படம் 145)



படம் 144.



படம் 145.

இரு கூம்பு வெட்டிகள் எவ்விதம் தொட்டாலும் தொடுகுத்திடத்து அவற்றிக்கு ஒரு பொதுத் தொடுவரை உண்டு.

20 இரட்டைத் தொடுகை (Double Contact).

ஒரு கூம்பு வெட்டியோடு இரட்டைத் தொடுகையுடைய வேறொரு கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு காணுதல்.

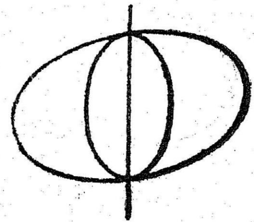
முதற் கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க. K நிலையெண் என்றால்

$$S - K(lx + my + n)(l_1x + m_1y + n_1) = 0 \qquad ...(1)$$

சமன்பாடு $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகள் $S = 0$ கூம்பு வெட்டியை வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும். $lx + my + n = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோடுகள் ஒன்றுபட்டால் இக்கோடுகள் $S = 0$ கூம்பு வெட்டியை வெட்டும் புள்ளிகள் ஒன்றுபடும் இரு புள்ளிகளாகும்.

எனவே, $S - K(lx + my + n)^2 = 0$ சமன்பாடு $lx + my + n = 0$ கோடு $S = 0$-ஐ வெட்டும் இடத்து $S = 0$-ஐத் தொடும் கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும்.



படம் 146

21. S=0 கூம்பு வெட்டிக்குக் குறித்தபுள்ளி (x_1, y_1)-லிருந்து வரையும் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு.

கூம்பு வெட்டியின் சமன்பாடு

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

(x_1, y_1)-லிருந்து கூம்பு வெட்டிக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் தொடு நாண்

$$axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \qquad \ldots (2)$$

(x_1, y_1)-லிருந்து (1)-க்கு வரையும் தொடு வரைகள் இரண்டும், (1) கூம்பு வெட்டியை (2) வெட்டும் இடத்து இரட்டைத் தொடுகை உடைய கூம்பு வெட்டிகளுள் ஒன்றாகும்.

அத்தகைய கூம்பு வெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c - K\{axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c\}^2 = 0 \quad (3)$$

(3) கூம்பு வெட்டி (x_1, y_1) வழிச் சென்றால் தொடுவரைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$\therefore\ ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c - K\{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c\}^2 = 0.$$

(அ-து) $$K = \frac{1}{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

எனவே, தொடுவரைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) - \frac{\{axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c\}^2}{(ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)} = 0.$$

(அ-து) $SS_1 = T^2$.

22. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ கூம்புவெட்டியின் உயிர்வட்டம்.

தம்முள் நேர்க்குத்தாக இருக்கும் தொடுவரைகளின் வெட்டும் புள்ளி இயங்குவரை கூம்பு வெட்டியின் உயிர் வட்டமாகும்.

(x_1, y_1) லிருந்து கூம்புவெட்டிக்கு வரையும் தொடுவரைகளின் சமன்பாடு

$$(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c)(ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = \{axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c\}^2$$

(அ-து) $(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c)(ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) - \{(ax_1 + hy_1 + g)x + (hx_1 + by_1 + f)y + gx_1 + fy_1 + c\}^2 = 0$

இத் தொடுவரைகள் தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பின்

x^2-ன் கெழு + y^2-ன் கெழு = 0.

$$\therefore \quad (a + b)(ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) - (ax_1 + hy_1 + g)^2 - (hx_1 + by_1 + f)^2 = 0.$$

(அ-து) $(ab - h^2)(x_1^2 + y_1^2) - 2(hf - bg)x_1 - 2(gh - af)y_1 + bc - f^2 + ca - g^2 = 0$

∴ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை அஃதாவது உயிர் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(ab - h^2)(x^2 + y^2) - 2(hf - bg)x - 2(gh - af)y + bc - f^2 + ca - g^2 = 0$$

இவ்வட்டத்தின் மையம் $\left(\dfrac{hf - bg}{ab - h^2}, \dfrac{gh - af}{ab - h^2}\right)$

இப் புள்ளி கூம்பு வெட்டியின் மையமாகும்.

கிளைத்தேற்றம் : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. பரவளையத்தின் உயிர்க்கோடு

$$2(hf - bg)x + 2(gh - af)y - (bc - f^2 + ca - g^2) = 0$$

ஆகும்.

23. நாற் புள்ளி ஒரு நிலைக் கூம்பு வெட்டிகள் (Four Point System of Conics).

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots (1)$$

$$S' \equiv a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \ldots (2)$$

(1), (2) இரண்டு கூம்புவெட்டிகளின் சமன்பாடுகள் என்றால்,

$$S + kS' = 0 \quad (3)$$

சமன்பாட்டைப் பார்ப்போம்.

k-ன் மதிப்பு எதுவாயினும் இது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால் (3) ஒரு கூம்புவெட்டியைக் குறிக்கும்.

மேலும் $S = 0$, $S' = 0$ கூம்பு வெட்டிகளின் பொதுப் புள்ளிகள்வழி $S + kS' = 0$ செல்லும். ஆகவே, k-இன் பன்மதிப்புகளுக்குத் தக $S + kS' = 0$, $S = 0$, $S' = 0$ கூம்பு வெட்டிகள் வெட்டும் நாற் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒருநிலைக் கூம்பு வெட்டிகளைக் குறிக்கும்.

24. இரு செவ்வக அதிபரவளையங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்பு வெட்டிகள் அனைத்தும் செவ்வக அதிபரவளையங்களாகும்.

முந்தின பகுதியின் $S = 0$, $S' = 0$ செவ்வக அதிபரவளையங்கள் எனக் கொள்க

$$\therefore \quad a + b = 0, \quad a_1 + b_1 = 0.$$

இவ்வதிபரவளையங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு நிலைக் கூம்பு வெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$S + kS' = 0$$

(அ-து) $(a + ka_1)\, x^2 + 2\,(h + kh_1)\, xy + (b + kb_1)\, y^2 + \ldots\ldots\ldots = 0$

இச் சமன்பாட்டில்

$$\begin{aligned} x^2\text{-ன் கெழு} + y^2\text{-ன் கெழு} &= a + ka_1 + b + kb_1 \\ &= a + b + k\,(a_1 + b_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\therefore$ $S + kS' = 0$ கூம்பு வெட்டிகள் அனைத்தும் அதிபரவளையங்களாகும்.

25 நாற் புள்ளி ஒரு நிலைக் கூம்பு வெட்டிகளுள் இரு பரவளையங்களும், ஒரு செவ்வக அதிபரவளையமும் உள.

$S = 0$, $S' = 0$ கூம்பு வெட்டிகள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு நிலைக் கூம்பு வெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$S + kS' = 0$$

(அ-து) $(a + ka_1)\, x^2 + 2\,(h + kh_1)\, xy + (b + kb_1)\, y^2 + \ldots\ldots\ldots = 0 \quad \ldots (1)$

இச் சமன்பாடு ஒரு பரவளையத்தைக் குறித்தால்

$$(h + kh_1)^2 = (a + ka_1)\,(b + kb_1)$$

இது k-ன் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால் k-க்கு இரு தீர்வுகள் உள.

எனவே, $S + kS' = 0$ கூம்பு வெட்டிகளுள் இரண்டு பரவளையங்களாகும்.

(1) சமன்பாடு செவ்வக அதிபரவளையத்தைக் குறித்தால்,

$$a + ka_1 + b + kb_1 = 0$$

$\therefore$ k-க்கு ஒரு மதிப்புத்தான் உண்டு. எனவே $S + kS' = 0$ கூம்பு வெட்டிகளுள் ஒன்று செவ்வக அதிபரவளையமாகும்.

மாதிரி 5 :

நாற் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் இரு பரவளையத்தின் அரை நேரகலங்கள் l_1, l_2 என்றும் அந் நாற்புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் செவ்வக அதிபரவளைய மையத்திலிருந்து இவ்விரு பரவளைய ஆயங்களுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் p_1, p_2 என்றும் இருந்தால்

$$p_1^2 + l_1^2 = p_2^2 + l_2^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் எட்டாப் புள்ளித் தொடு வரைகளை ஆயத்தொலை ஆயங்களாகக் கொண்டால் செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$xy = k^2.$$

நாற் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு பரவளையத்தின் சமன் பாட்டை $(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க.

∴ ஏனைய பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda\,(xy - k^2) = 0.$$

இது பரவளையமாகையால்

$$\left(\alpha\,\beta + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = \alpha^2\,\beta^2$$

$$\therefore \quad \lambda = -4\alpha\,\beta.$$

∴ இப் பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(\alpha x - \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c + 4\;\alpha\,\beta\,k^2 = 0.$$

$$\therefore \quad l_1 = \frac{\alpha f - \beta g}{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad l_2 = \frac{\alpha f + \beta g}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \quad l_1^2 - l_2^2 = \frac{(\alpha f - \beta g)^2 - (\alpha f + \beta g)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^3}$$

$$= -\frac{4\,\alpha\,\beta\,f\,g}{(\alpha^2 + \beta^2)^3}.$$

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மையம் (0, 0).

பரவளையங்களின் ஆயங்கள்

$$\alpha x + \beta y + \frac{\alpha g + \beta f}{\alpha^2 + \beta^2} = 0, \quad \alpha x - \beta y + \frac{\alpha g - \beta f}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

$$\therefore \quad p_1 = \frac{\dfrac{\alpha g + \beta f}{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha\,g + \beta f.}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$p_2 = \frac{\alpha g - \beta f}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \quad p_2{}^2 - p_1{}^2 = \frac{(\alpha g - \beta f)^2 - (\alpha g + \beta f)^2}{(\alpha^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{4\,\alpha\,\beta\,gf}{(\alpha^2 + \beta^2)^3}$$

$$\therefore \quad l_1{}^2 - l_2{}^2 = p_2{}^2 - p_1{}^2$$

$$\therefore \quad l_1{}^2 + p_1{}^2 = l_2{}^2 + p_2{}^2.$$

26. நாற் புள்ளி ஒரு நிலைக் கூம்பு வெட்டிகளின் மையங்களதும் இயங்குவரை.

இந் நாற் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் இரு கூம்பு வெட்டிகளின் சமன்பாடுகள்

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots (1)$$
$$S' \equiv a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \ldots (2)$$

எனக் கொண்டால் நாற் புள்ளி ஒரு நிலைக் கூம்பு வெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$S + kS' = 0 \quad \ldots (3)$$

(3)-ன் மையங்கள்

$$(a + ka_1)\,x + (h + kh_1)\,y + (g + kg_1) = 0.$$
$$(h + kh_1)\,x + (b + kb_1)\,y + (f + kf_1) = 0$$

சமன்பாடுகளால் வரும்.

இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து k-ஐ அகற்றினால் இக் கூம்பு வெட்டிகளின் மைய இயங்குவரை கிடைக்கும். மைய இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$(ax + hy + g)\ (h_1x + b_1y + f_1) = (a_1x + h_1y + g_1)\ (hx + by + f)$$

இது ஒரு கூம்பு வெட்டியாகும்.

எனவே, நாற் புள்ளி ஒருநிலைக் கூம்பு வெட்டிகளின் மைய இயங்குவரை ஒரு கூம்பு வெட்டியாகும்.

மாதிரி 6 :

A, B, C, D ஒரு வட்டப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு நிலைக் கூம்பு வெட்டிகளின் மைய இயங்குவரை ஒரு செவ்வக அதிபரவளையமாகும் என நிறுவுக.

முந்தின பகுதியில் மைய இயங்குவரை

$(ax + hy + g)\ (h_1x + b_1y + f_1) =$
$(a_1x + h_1y + g_1)\ (hx + by + f)$ ... (1)
எனக் கண்டோம்.

A, B, C, D நாற் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தில் இருந்தால் $S + kS' = 0$, k-ன் ஒரு மதிப்புக்கு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்க வேண்டும்.

அதன் கட்டுப்பாடுகள்

$h + kh_1 = 0$ ... (2)

$a + ka_1 = b + kb_1$ ... (3)

∴ (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து k-ஐ அகற்றினால்
$h_1 (a - b) = h (a_1 - b_1)$ ... (4)

(1) கூம்பு வெட்டிச் சமன்பாட்டில்

x^2-ன் கெழு + y^2-ன் கெழு $= ah_1 - a_1 h + hb_1 - h_1 b.$
$= h_1 (a - b) - h (a_1 - b_1)$
$= 0$, { (4)-ஆல் }.

∴ (1) கூம்புவெட்டி, அஃதாவது மைய இயங்குவரை ஒரு செவ்வக அதிபரவளையமாகும்.

விடைகள்

பயிற்சிகள் 1 (பக்கம் 6—8).

1 (1) 5. (2). $\sqrt{17}$. (3) $3\sqrt{5}$.

(4) $\left[a^2 (t_1 - t_2)^2 \left\{ (t_1 + t_2)^2 + 4 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$

(5) $2\sin \frac{\theta \sim \phi}{2} \left[a^2 \sin^2 \frac{\theta + \phi}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\theta + \phi}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$

(6) $\left[\frac{c^2 (t_1 - t_2)^2 (1 + t_1^2 t_2^2)}{t_1 t_2} \right]^{\frac{1}{2}}$

3 இரு சரிச்சிறை முக்கோணம். 4 வட்டஆரை 5

13 (1) (1, 4). (2) (0, 1). (3) ($\frac{1}{8}$, 2).

14 (10, 15) 15 (— 7, —8); (— 10, 6)

16 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 3, $\frac{3\sqrt{10}}{3}$

17 (28, — 2), (— 32, 18).

22 (1) $-\frac{1}{2}$. (2) $-\frac{3}{4}$. (3) $-\frac{3}{2}$

23 $\left(-\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$; ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$) ; $\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$

24 (— 2, — 4) 25 ($\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$).

பயிற்சிகள் 2 (பக்கம் 12).

1 (1) $\frac{25}{2}$ (2) 78. (3) $ab - 4\,ac - bc$

2 (1) 96. (2) 21. (3) 226.

5 $7x + y = 11$. 6. 43 அல்லது — 33.

பயிற்சிகள் 3 (பக்கம் 15—16).

3 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2$.

4 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = K$.

7 $4x^2 + 3y^2 = 0$.

8 (1) $2(x^2 + y^2 + a^2) = c$.

(2) $2ax = K$.

(3) $(k^2 + 4ax)^2 = 4k^2 \{ (x + a)^2 + y^2 \}$

(4) $(x - a)^2 + y^2 = k^2 \{ (x + a)^2 + y^2 \}$

(5) $2cx = c^2 - a^2$.

9 $8x^2 + 8y^2 = 2x + 36y - 35$.

10 $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 28 = 0$.

பயிற்சிகள் 4 (பக்கம் 32—34).

1 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $-\frac{3}{4}$ (3) $-\frac{b}{a}$ (4) $-\cot \alpha$.

2 (1) $x + 4y = 19$. (2) $3x + 2y = 2$.
(3) $13x + 5y + 4 = 0$ (4) $x - y = 1$.

4 (1) $\left(\frac{15}{7}, 0\right)$; $\left(0, -\frac{15}{8}\right)$

(2) $(3, 0)$, $\left(0, \frac{12}{5}\right)$; (3) $(3, 0)$, $(0, 6)$

(4) $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{8}{7}\right)$

5 (1) $8x + y + 6 = 0$. (2) $3x - 2y = 12$. (3) $2y = 7x$.
(4) $y - x = 5\sqrt{2}$. (5) $x + y = 7$.

8 (1) $\sqrt{10}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{68}$ (2) 4, $6\sqrt{2}$, $2\sqrt{10}$.

9 $5x = 3y$; $3x = 2y$; $2x = y$.

10 உண்டு, உண்டு.

11 $\frac{7}{12}$

14 $x + 2 = 0$, $7x - 24y + 182 = 0$.

15 $x - y + 2 = 0$, $2\sqrt{2}$, $\frac{7}{6}$

16 $p^2 (x^2 + y^2) = 4x^2 y^2$.

பயிற்சிகள் 5 (பக்கம் 45–48).

1 (1) $\left(-\frac{17}{7}, -\frac{23}{7}\right)$. (2) $(-3, -1)$. (3) $(1, 1)$

2 $4x + 19y - 7 = 0$, $32x + 5y + 7 = 0$.

4 4. 5. 5.

7 (1) c^3. (2) $\frac{464}{7}$

8 $\left(\frac{16}{3}, \frac{11}{3}\right)$ 9 $2x - 3y + 7 = 0$

10 $2x + 3y - 13 = 0$.

11 $x + 4y - 9 = 0$.

13 $p = 1$ அல்லது 2.

14 $x + y = 5$.

15 $3x + 2y - 7 = 0$.

16 $29x + 8y - 37 = 0$.

17 $42x + 35y - 44 = 0$.

18 $3x + 4y - 6 = 0$.

19 $x - y - 1 = 0$.

20 (1) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ (2) $(0, 1)$. (3) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

21 (1) $\left(\frac{37}{19}, \frac{7}{19}\right)$ (2) $\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$ (3) $(-3, 7)$.

22 (1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right)$

23 $4x + 5y = 9$, $7x + 2y = 9$, $x = y$.

24 $3x - 4y + 4a = 0$; $\frac{5}{2} a^2$

25 $7x + 3y - 4 = 0$; $7x + 3y - 33 = 0$.
$3x - 7y - 10 = 0$, $3x - 7y + 19 = 0$.

26 $7x - 3y = 4$; $7x - 3y + 24 = 0$.
$3x + 7y = 10$.

28 $(1, 5)$, $(1, 9)$, $(5, 9)$, $(5, 5)$.

29 $7x + 23y - 54 = 0$, $23x - 7y - 9 = 0$.

31 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

33 $x + \sqrt{3}.y = 2 + \sqrt{3}$.

பயிற்சிகள் 6 (பக்கம் 49—51)

1 $\left(\frac{18}{13}, \frac{25}{13}\right)$

2. $\left(\frac{113}{13}, \frac{6}{13}\right)$

6. $3x + y = 8.$

10. $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$ $\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

அல்லது, $\frac{a_1a_3 + b_1b_3}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2a_3 + b_2b_3}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

11. $5x + y - 3 = 0,\ x - 3y + 2 = 0; \left(\frac{7}{16}, \frac{13}{16}\right)$

12. $(1, lmn + l + m + n)$

பயிற்சிகள் 7 (பக்கம் 59—60)

3. $6x - 7y = 9.$

6. $(1, 8).$

7. $(1, 1),$

10. $x - y = 12,\quad 7x + 7y = 86.$

11. $2x + 16y + 13 = 0.$

பயிற்சிகள் 8 (பக்கம் 70—73)

1. $-10;\ 4x + 5y + 3;\ 3x - 2y + 1.$

2. $8, (2, -2).$ 4 — $\frac{10}{9}$

5. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 6. $x^2 + 3xy + y^2 - 8x - 7y + 11 = 0.$

7. $\sqrt{\frac{5}{12}}$ 8. $5a\sqrt{2}.$ 9. $\frac{5}{2}$

11. $a(y - d)^2 - 2h(y - d)(x - c) + b(x - c)^2 = 0.$

12. $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

பயிற்சிகள் 9 (பக்கம் 82—84)

5. $y + 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}(x + 1)$; $y + 1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}(x + 1)$.

6. $a + b = 0$, $h(l^2 - m^2) = (a - b)\, lm$.

13. $n(x^2 + y^2) - 2(px + qy)(lx + my) = 0$; $pl + qm = n$.

16. $2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$.

18. $\frac{x^2 - y^2}{k^2 - 4a^2 - 8a^2m} = \frac{xy}{2ak}$.

பயிற்சிகள் 10 (பக்கம் 112—116)

1. (1) $(3, -1)$, 7. (2) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$, $\frac{\sqrt{85}}{4}$

(3) $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$, $\frac{\sqrt{13}}{6}$. (4) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\frac{\sqrt{143}}{3}$.

2. (1) $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$.
(2) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 24y + 3 = 0$.
(3) $4x^2 + 4y^2 + 8x + 16y + 11 = 0$.
(4) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 14y + 43 = 0$.

3. (1) $3x^2 + 3y^2 + 2x - 20y + 17 = 0$.
(2) $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$.
(3) $7x^2 + 7y^2 - 39x - 17y + 32 = 0$.

4. $3x^2 + 3y^2 - 60x + 40y = 0$.

5. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.
$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$.

6. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$.

8. (1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.
(2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$.
(3) $x^2 + y^2 - 17x - 19y + 50 = 0$.
(4) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.

(5) $x^2 + y^2 - y - 16 = 0.$

(6) $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0.$

(7) $x^2 + y^2 - 2(5\pm2\sqrt{3})(x + y) + (5\pm2\sqrt{3})^2 = 0.$

(8) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0.$

(9) $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0.$

(10) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,\ x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0.$

11. $(-1, 2)$ வெளி. $(0, 0)$, $(3, 4)$ இவ்விரண்டும் உள்.

13. $7x^2 + 7y^2 = 2a.$ 14. $\left(-\frac{11}{3}, 0\right)$, $\frac{10}{3}.$

15. $2x^2 + 2y^2 + 6x - 17y - 6 = 0.$

17. $+1, -\frac{1}{7}.$ 18. $2(x + y) = 7 \pm \sqrt{10}.$

20. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c - g^2 - f^2 = 0.$

22. $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}x - 4y + 5 = 0.$

25. $(15, 20).$

29. கூம்பு வெட்டி.

30. வட்டம்.

பயிற்சிகள் 11 (பக்கம் 137—142)

2. $10x^2 + 10y^2 + 18x - 30y - 8 = 0.$

4. $3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$

5. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 12 = 0.$
   $5(x^2 + y^2) + 4x + 8y - 36 = 0.$

6. $4x^2 + 4y^2 - 11x - 11y - 28 = 0.$

7. $x^2 + y^2 - 36x - 46y + 324 = 0.$
   $25x^2 + 25y^2 - 80x - 494y + 64 = 0.$

8. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0.$
   $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0.$

9. $x^2 + y^2 - 3x - 2y + 2 = 0.$
   $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0.$

10. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0.$
11. $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = 2ab(bx + ay).$
13. $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0.$
14. $\frac{7\sqrt{5}}{5}.$ 15 $x + y = 2\frac{\sqrt{3}}{2}.$
16. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \frac{\sqrt{17}}{3}.$
17. $(-2, -1).$
19. $x^2 + y^2 - 2x(a + b) - y(a + b) + a^2 + 3ab + b^2 = 0.$
20. $x^2 + y^2 + 9x + 7y - 6 = 0.$
21. $x^2 + y^2 - 5x - 14y - 34 = 0.$
22. வட்டங்களின் ஆரை R, R_1 என்றால் $R^2 + R_1^2 = 14.$
24. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0.$
25. $x^2 + y^2 = 8, x^2 + y^2 - 16y - 8 = 0$
26. $x^2 + y^2 + (8 \pm 10\sqrt{2})y + 9 = 0.$
27. $(-a, 0).$
28. $y^2 + 4ax - 5a^2 = 0.$
29. $c(x^2 + y^2) - Ax - By + D = 0.$
33 $(3, -1).$
34. $5(x^2 + y^2) - 40x - 96y + 80 = 0$
$x^2 + y^2 - 200x - 480y + 10000 = 0.$
35. $(0, 3), (-2, -1).$
36. $(1, -1)\ (3, -1).$
45. $y - 4 = 0, \ 16x - 15y - 80 = 0$
46. $(x + 4)^2 - 3(y - 1)^2 = 0.$
47. $x = 0, 3x + 4y = 10, y = 4, 4x - 3y = 0.$

பயிற்சிகள் 12 (பக்கம் 150)

1. நேரகலம் a, உயிர்ப்புள்ளி $\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{a}, 0\right)$

2. நேரகலம் $\frac{1}{a}$, உயிர்ப்புள்ளி $\left(-\frac{b}{a}, \frac{ac - b^2}{a} + \frac{1}{4a}\right)$

உயிர்க்கோடு $y = \frac{ac - b^2}{a} - \frac{1}{4a}.$

3. (1) முனை $(1, -3)$, உயிர்ப் புள்ளி $(1, -2)$ உயிர்க் கோடு $y + 4 = 0$.

(2) முனை $\left(-\frac{9}{8}, 0\right)$, உயிர்ப்புள்ளி $\left(\frac{7}{8}, 0\right)$ உயிர்க்கோடு $8x + 25 = 0$.

(3) முனை $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, உயிர்ப்புள்ளி $\left(-\frac{7}{4}, 1\right)$ உயிர்க்கோடு $4x = 1$.

(4) முனை $(2, \frac{1}{2})$, உயிர்ப்புள்ளி $(2, 0)$ உயிர்க் கோடு $y=1$.

(5) முனை $(2, -1)$, உயிர்ப்புள்ளி $(2, \frac{1}{4})$ உயிர்க்கோடு $4y + 9 = 0$.

(6) முனை $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, உயிர்ப்புள்ளி $(1, 2)$ உயிர்க் கோடு $x + y - 1 = 0$.

பயிற்சிகள் 13 (பக்கம் 169—174)

1. $2y = x + 4$.

7. $576(y^2 - 5x) = (5x - 26y + 25)^2$.

8. $c = am + \frac{a}{m}$.

10. $(2, -4)$, $(8, -8)$.

27. நிலையெண் k என்றால் $x = \frac{a}{k}$.

30. $y^2 - 4ax = (x + a)^2$.

31. $x = a$.

33. $al^3 + 2alm^2 + nm^2 = 0$.

34. $x^3 = a(2x^2 + y^2)$.

பயிற்சிகள் 14 (பக்கம் 179—181).

1. $(1, 2)$, $(4, 4)$.

7. $y^2 = 2a(x - 2a)$.

11. $(4a, 4a)$, $(4a, -4a)$.

பயிற்சிகள் 15 (பக்கம் 192—193)

1. $7y = 2(x+1),\ 8y = 2(x+4).$
5. $x^2 - y^2 = 4a^2.$
7. R $(at_1^2, 2at_1)$ என்றால் $(2a, -at_1),\ x = 2a.$
11. $\frac{y^2}{2a} + \frac{4a^3}{y^2} = x - 2a.$
13. $4abx + (4a^2 - b^2)y = 4a^2b.$

பயிற்சிகள் 16 (பக்கம் 202)

1. மையத் தொலைத்தகவு $\frac{\sqrt{5}}{3}$

   உயிர்ப்புள்ளிகள் $\left(0, \pm \frac{\sqrt{15}}{18}\right)$
2. $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 80x + 48y - 176 = 0.$
3. $101x^2 + 48xy + 81y^2 - 330x - 324y + 441 = 0.$
4. $8x^2 + 9y^2 = 162.$
5. $x^2 + 2y^2 = 8.$

6. (1) மையம் $(2, -1)$; நேரகலம் $\frac{8}{\sqrt{2}}$; $e = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

   உயிர்ப்புள்ளிகள் $(1, -1), (3, -1).$

   (2) மையம் $(-1, -2)$; நேரகலம் $\frac{8}{3}$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

   உயிர்ப்புள்ளிகள் $(-1 \pm \sqrt{5}, -2).$

   (3) மையம் $(1, 0)$; நேரகலம் $\sqrt{3}$; $e = \frac{1}{2}$;

   உயிர்ப்புள்ளிகள் $\left(1, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

   (4) மையம் $(1, 2)$; நேரகலம் $\frac{4}{3}$; $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

   உயிர்ப்புள்ளிகள் $(1 \pm 4\sqrt{2}, 2).$
7. 12 அடி 9 அங்குலம்.

பயிற்சிகள் 17 (பக்கம் 231—237)

1. $c = \pm 5.$
2. $(2, 1).$
3. $y = \sqrt{3}x \pm 7.$

4. $y - 3 = 0,\ y + x - 5 = 0.$

5. $y = x \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$

7. $\pm \cos^{-1}(\pm e).$

14. $e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

15. குறித்த கோட்டிலிருந்து குறித்த புள்ளியின் தொலை k என்றால், குற்றச்சு நுனியின் இயங்குவரை $xk - y = k^2.$

20. நெட்டச்சில் மையத்திலிருந்து $\frac{2ae}{c^2 + 1}$ தொலைக்கு அப்பாலுள்ள புள்ளி.

49. $\left(\frac{ax}{a^2 + b^2}\right)^2 + \frac{y^2}{4b^2} = 1.$

பயிற்சிகள் 18 (பக்கம் 244—247)

2. $a^2l^2 + b^2m^2 = 4.$

7. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{b^2}.$

8. $pa^2y^2 + b^4x = 0.$

9. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$

14. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{d^2}.$

பயிற்சிகள் 19 (பக்கம் 263—267)

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}.$

2. $\frac{x}{\sqrt{7}} \pm \frac{y}{\sqrt{3}} = 0.$

3. $\sqrt{\frac{2}{3}}.$

4. $\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{5}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right).$

25. $2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^2 - b^2)^2(a^2x^2 - b^2y^2)^2.$

30. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.

32. $4x^2 + 9y^2 = 4x$.

34. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2$.

36. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) + \frac{l^2}{4a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$.

பயிற்சிகள் 20 (பக்கம் 280—282)

1. $x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y = 0$.
2. $19x^2 + 216xy - 44y^2 + 108x - 144y - 36 = 0$.
3. $e = \frac{5}{4}$; நேரகலம் $\frac{9}{2}$; உயிர்ப்புள்ளிகள் $(\pm 5, 0)$.
4. மையம் $(2, 3)$; $e = \frac{5}{4}$; நேரகலம் $\frac{27}{2}$;

   உயிர்ப்புள்ளிகள் $(17, 3)$, $(-13, 3)$.
5. மையம் $\left(\frac{84}{25}, -\frac{12}{25}\right)$; உயிர்ப்புள்ளிகள்

$$\left(\frac{84+15\sqrt{13}}{25}, \frac{-12+15\sqrt{13}}{25}\right), \left(\frac{84-15\sqrt{13}}{25}, \frac{-12-15\sqrt{13}}{25}\right)$$

6. $\left(-\frac{20}{\sqrt{65}}, -\frac{5}{2\sqrt{65}}\right)$; $y = 2x \pm \frac{\sqrt{65}}{2}$.

   $\left(\frac{20}{\sqrt{65}}, \frac{5}{2\sqrt{65}}\right)$.

8. $y = 2x + 1$, $y = -2x - 1$.

15. $2x - 3y = 0$ கோட்டுப்புள்ளிகள்.

16. $24x - 25y = 22$.

21. $4y = 3x$.

22. $9y = 32x$.

பயிற்சிகள் 21 (பக்கம் 300—302)

1. $(3x - 4y + 7)(4x + 3y + 1) = 7.$
2. $(2x - 3y + 7)(3x + 2y - 5) + 35 = 0.$
3. $(3x + y - 7)(2x - y - 3) = 6.$
4. $(2x - 3y + 5)(3x + 2y + 1) = 8.$
5. (1) $2x^2 + 5xy - 3x + y - 2 = 0.$

   (2) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y + 5 = 0.$

   (3) $6x^2 - 7xy - 3y^2 + x + 4y - 1 = 0.$
6. (1) $2xy + 7x - 6y - 24 = 0.$

   (2) $(lx + my + n)(l_1x + m_1y + n_1) + k^2 = 0.$

   (3) $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 6 = 0.$

   (4) $4x^2 + 13xy + 3y^2 + x + 3y + 25 = 0.$

   (5) $(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) + 12 = 0.$
7. $x = 0, \quad y = 0.$
8. $(x + y + 1)(2x - y + 2) = 81/4.$
9. $3x^2 - 8xy + 4y^2 + 12x - 12y = 0.$
10. $(10y - 13x + 105)(x + 2y - 5) + 525 = 0.$

பயிற்சிகள் 22 (பக்கம் 313—318)

1. $\left(\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}}\right); x + y = \pm c.$

40. $\alpha + \alpha' = 2n\pi.$

பயிற்சிகள் 23 (பக்கம் 362—368)

1. $\left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{2}, \tan^{-1}\frac{B}{A}\right).$
2. $B^2 a^2 + 2Aa - 1 = 0.$

9 $r\cos\theta + d = 0; \left(-d \pm \sqrt{d^2 + 2ad}, 0^\circ\right).$

18. $(A - e)^2 + B^2 = 1.$

பயிற்சிகள் 24 (பக்கம் 395—396)

1. நீள்வட்டம்; மையம் $(2, -3)$; நெட்டச்சின் சமன்பாடு $4x + 3y + 1 = 0$; நீளம் 6; குற்றச்சின் சமன்பாடு $3x - 4y - 18 = 0$; நீளம் 4.

2. அதிபரவளையம்; குறுக்காயச் சமன்பாடு $x + y + 4 = 0$, நீளம் $2\sqrt{2}/7$ துணையாயச் சமன்பாடு $x - y + 4 = 0$; நீளம் $2\sqrt{2}/3$.

3. பரவளையம்; முனை $(-1, 1)$; ஆயம் $3x + 4y - 1 = 0$; நேரகலம் 4; முனையிடத்துத் தொடுவரை $4x - 3y + 7 = 0$.

4. நீள்வட்டம்; மையம் $(-1, 1)$; நெட்டச்சின் சமன்பாடு $x + 2y - 1 = 0$, நீளம் 4; குற்றச்சின் சமன்பாடு $2x - y + 3 = 0$, நீளம் 2.

5. அதிபரவளையம்; மையம் $(3, 4)$; குறுக்காயச் சமன்பாடு $4x + 3y - 24 = 0$, நீளம் 2; துணையாயச் சமன்பாடு $3x - 4y + 7 = 0$, நீளம் $4\sqrt{6}$.

6. பரவளையம்; முனை $(-2, 3)$; ஆயம் $5x - 12y + 4 = 0$; நேரகலம் 6; முனையிடத்துத் தொடுவரை $12x + 5y + 9 = 0$.

7. நீள்வட்டம்; மையம் $(1, -2)$; நெட்டச்சின் சமன்பாடு $3x + 4y + 5 = 0$, நீளம் $2\sqrt{6}$; குற்றச்சின் சமன்பாடு $4x - 3y - 10 = 0$, நீளம் $2\sqrt{2}$.

8. அதிபரவளையம்; மையம் $(2, -1)$; குறுக்காயச் சமன்பாடு $x + 3y + 1 = 0$, நீளம் 2; துணையாயச் சமன்பாடு $3x - y = 7$, நீளம் 1; எட்டாப் புள்ளித் தொடுவரைகள் $x + y = 1$, $x - 7y = 9$.

9. பரவளையம்; முனை $(-4, 2)$; ஆயம் $4x + 3y + 10 = 0$; முனையிடத்துத் தொடுவரை $3x - 4y + 20 = 0$; நேர் அகலம் 8.

10. நீள்வட்டம்; மையம் $(-4, 3)$; நெட்டச்சின் சமன்பாடு $x + y + 1 = 0$, நீளம் 8; குற்றச்சின் சமன்பாடு $x - y + 7 = 0$, நீளம் 4.

11. அதிபரவளையம்; மையம் $(-1, 1)$, குறுக்காயச் சமன்பாடு $x-2y+3=0$, நீளம் 2; துணையாயச் சமன்பாடு $2x+y+1=0$, நீளம் 6.

12. பரவளையம்; முனை $(23/16, -3/16)$; ஆயம் $4x+4y-5=0$; முனையிடத்துத் தொடுவரை $8x-8y-13=0$; நேர் அகலம் $3/2\sqrt{2}$.

13. நீள்வட்டம்; மையம் $(-1, 2)$; நெட்டச்சின் சமன்பாடு $x-y+3=0$, நீளம் $6\sqrt{2}$; குற்றச்சின் சமன்பாடு $x+y-1=1$, நீளம் $2\sqrt{6}$.

14. அதிபரவளையம்; மையம் $(-1, 2)$; குறுக்காயச் சமன்பாடு $x+2y=3$, நீளம் $\sqrt{2}$; துணையாயச் சமன்பாடு $y-2x-4=0$; நீளம் $2/3\sqrt{3}$.

15 பரவளையம், நேரகலம் $1/13$; ஆயம் $5x-12y+1=0$; முனையிடத்துத் தொடுவரை $12x+5y+2=0$.

16. $4x-3y+2=0$; $(-1/5, 2/5)$; 8; $(1, 2)$.

17. $(1, -1)$, $(-1, 2)$; $2x-3y-1=0$;
$2x-3y+4=0$.

18. $(2, 3)$, $(-1, -2)$.

19. $(1, 2)$.

20. $(5/8, 13/8)$, $4x+4y-7=0$.

கலைச்சொற்கள்

Algebra — இயற்கணிதம்.
Acceleration — விசை மாறு வீதம்.
Acceleration-angular — கோண விசை மாறு வீதம்.
Angle — கோணம்.
Angle of depression — இறக்கக் கோணம்.
Angle of elevation — ஏற்றக் கோணம்.
Angle-Intersecting — வெட்டுங் கோணம்.
Angle-right — செங்கோணம்.
Angle semivertical — உச்சிக் கோணப் பாதி
Angle-vectorial — தொலைக் கோணம்.
Approximately — அண்ணளவாக.
Arc — வில்.
Area — பரப்பளவு, பரப்பு.
Asymptote — நெடுநிலை அல்லது நீளத் தொடுவரை.
Axis — அச்சு, ஆயம்.
Axis-Major — நெட்டச்சு.
Axis-Minor — குற்றச்சு.
Bending moment — வளைவு நெம்புதிறன்.
Binomial — ஈருறுப்புச் சேர்ப்பு.
Breadth — அகலம்.
Calculations — கணக்கீடுகள்.
Calculus — நுண்கணிதம்
Calculus-Differential — வகை நுண் கணிதம்.
Calculus-Integral — தொகை நுண்கணிதம்.
Cardioid — நெஞ்சு வளை.
Catenary — கயிற்று வளை.
Centre — மையம்.
Chemical reaction — வேதி எதிர்வினை.
Chord — நாண்
Circle — வட்டம்.
Circumference — சுற்றளவு, வட்டவரை
Concavity — குழிவு.
Condition — கட்டுப்பாடு.
Coefficient — கெழு

Coefficient-differential — வகைக் கெழு.
Coefficient-linear expansion — நீட்டப் பெருக்கக் கெழு.
Coefficient-numerical — எண் கெழு.
Coefficient of friction — பிணர்வுக் கெழு
Coeƒficient-partial differential — பகுப்பு வகைக் கெழு.
Coefficient-successive differential — அடுத்தடுத்த வகைக் கெழு.
Coefficient-total differential — கூடிய வகைக் கெழு.
Cone — வட்டக் கூம்பு
Conic — கூம்பு வெட்டி.
Conjugate — துணையிய.
Constant — மாரு ராசி.
Contact-point of — தொடு குற்று.
Continuous — தொடர்ந்த.
Conversely — தலைமாற்றியுரைக்கின்.
Convexity — குவிவு
Co-ordinates — ஆயத் தொலைகள்.
Co-ordinates, polar — போலார் துணையெண்கள்.
Corollary — கிளைத் தேற்றம்.
Corresponding — நேர் நிலையான
Cosine — கிடக்கை.
Cube — கன சதுரம்.
Curvature — வளைவு.
Curvature-centre of — கோட்ட மையம்
Curvature-circle of — கோட்ட வட்டம்.
Curvature-radius of — கோட்ட ஆரை.
Curve — வளைவரை.
Curved — வளைந்த
Cyclic — ஒருவட்ட
Cycloid — உருள் வளை
Cycloid-Epi — புற உருள் வளை
Cycloid-Hypo — அக உருள் வளை
Cylinder — வட்டவுருட்டு.
Decimal — பதின் பகுப்பு
Definition — வரையறை.
Denominator — பின்னக்கீழ் எண்
Density — செறிவு
Diagonal — மூலைவரை.
Diameter — விட்டம்.
Differentiation — வகைக் கெழு காணுதல்.

F—*cout.*

Function .. .. .. சார்பு, சார்பலன்.
Function, continuous .. .. தொடர்ச்சியுடைச் சார்பு.
Function, decreasing .. .. குறையுஞ் சார்பு.
Function, discontinuous .. தொடரில் சார்பு.
Function, even .. .. .. இரட்டைச் சார்பு.
Function, explicit .. .. வெளிப்படு சார்பு.
Function, homogeneous .. சமபடித்தான சார்பு.
Function, hyperbolic .. .. கந்தழிச் சார்பு.
Function, increasing .. .. கூடுஞ் சார்பு.
Function, inverse .. .. எதிர்மறைச் சார்பு.
Function, inverse hyperbolic .. எதிர்மறைக் கந்தழிச் சார்பு.
Function, implicit .. .. உட்படு சார்பு.
Function, many valued .. பன்மதிப்புடைய சார்பு.
Function, odd .. .. .. ஒற்றைச் சார்பு.
Function of a function .. சார்பின் சார்பு.
Function, single valued .. ஒரு மதிப்புடைய சார்பு.
Function, trigonometrical .. கோண கணித சார்பு.
Functional relation .. .. சார்புத் தொடர்பு.

G

Generalise .. .. .. பொதுப்படையாக்கு.
Geometry .. .. .. வடிவ கணிதம்.
Gradient .. .. .. சாய்வு வீதம்.
Gravity .. .. புவிக்கவர்ச்சி.

H

Hyperbola .. .. .. அதிபரவளையம்.
Hyperbola, rectangular .. செங்கோண அதிபரவளையம்.
Hyperbolic cosine .. .. கந்தழி கிடக்கை.
Hyperbolic sine .. .. கந்தழி நெடுக்கை.
Hyperbolic tangent .. .. கந்தழி இருக்கை.
Hypotenuse .. .. .. எதிர்சிறைப் பக்கம்.

I

Inclination .. .. .. சாய்வு.
Increment .. .. .. கூடுந் தொகை.
Indeterminate .. .. .. தேரப்பெறுத.
Induction .. .. .. உய்த்தறிதல்.
Infinity .. .. எண்ணிலி.

I—*cont.*

Initial line .. .. தொடக்கக் கோடு.
Integer .. .. முழு எண்.
Intercept .. .. .. வெட்டுத் துண்டு.

L

Limit .. .. எல்லை.
Locus .. .. இயங்குவரை.
Logarithm .. .. .. மடக்கை.
Logarithm, anti .. .. இன மடக்கை.

M

Motion .. .. இயக்கம்.
Multiple .. .. .. மடங்கு.
Multiple, odd .. .. .. ஒற்றைப்படையான மடங்கு.

N

Normal .. .. செங்கோடு.
Number .. .. .. எண்.
Number, negative .. .. குறையெண்.
Number, positive .. .. மிகை எண்.
Numerator .. .. .. பின்ன மேல் எண்.

O

Ordinate .. .. .. குத்தாயம்.
Ordinate, double .. .. இரட்டைக் குத்தாயம்.
Origin .. .. ஆதி.
Orthogonal .. .. .. செங்கோண வெட்டான.

P

Parabola .. .. .. பரவளையம்.
Parallel .. .. ஒருபோகு.
Parallel straight lines .. ஒருபோகுக் கோடுகள்.
Parallelopiped .. .. .. முப்போகுக் கட்டி.
Pendulum .. .. .. ஊசலி.
Pendulum, simple .. .. இயல்பு ஊசலி.
Perimeter .. .. .. சுற்றளவு.
Point .. .. புள்ளி.
Point of inflexion .. .. உரு மாறும் புள்ளி.

P—*cont.*

Pole	போல்.
Polynomial	பல்லுறுப்புச் சேர்ப்பு.
Pressure	அமுக்கம்.
Proof	தெரிப்பு.
Property	பண்பு.
Protractor	கோண அளவி.

Q

Quadratic	இருபடிய.
Quadrilateral	நாற்சிறை.
Quotient	ஈவு.

R

Radian	ஆரைக் கோணம்.
Radius	ஆரை.
Radius vector	ஆரைத்தொலை.
Ratio	தகவு.
Ratio inverse	மாறுன தகவு.
Rectangle	நீள்சதுரம்.
Remainder	மீதி.
Resistance	பிணர்வு.
Resistance, external	வெளிப் பிணர்வு.
Resistance, internal	உட் பிணர்வு.
Rigidity	விறைப்பு.
Roots	தீர்வுகள்.
Roots, equal	சம தீர்வுகள்.
Roots, imaginary	கற்பனைத் தீர்வுகள்.
Roots, real	இயல்புத் தீர்வுகள்.

S

Sector	வட்டப் பகுதி.
Series	தொடர்.
Series, convergent	எல்லையுள் தொடர்.
Series, divergent	எல்லையில் தொடர்.
Series, infinite	முடிவிலாத் தொடர்.
Series, geometric	பெருக்கத் தொடர்.
Series, oscillatory	ஊசலாடும் தொடர்.
Sign	குறியீடு.
Sine	நெடுக்கை.

S—*cont.*

Sphere .. .. கோளம்.
Square .. .. சதுரம்.
Sub-normal .. .. .. அடிச் செங்கோடு.
Sub-tangent .. .. .. அடித் தொடுவரை அல்லது அடித் தொடு கோடு.
Substitute .. .. .. ஈடு கொடு.
Symmetry .. .. .. சமச்சீர்.

T

Tangent .. .. .. தொடுவரை.
Tangent (Trigo) .. .. இருக்கை.
Theorem .. .. .. தேற்றம்.
Transformation .. .. உருமாற்றம்.
Trigonometry .. .. .. கோண கணிதம்.

V

Value .. .. மதிப்பு.
Value, approximate .. .. அண்ணளவு மதிப்பு.
Value, imaginary .. .. கற்பனை மதிப்பு.
Value, indeterminate .. தேரப்பெருத மதிப்பு.
Value, maximum .. .. மீப்பெரு மதிப்பு.
Value, minimum .. .. மீச்சிறு மதிப்பு.
Value, negative .. .. குறை மதிப்பு.
Value, positive .. .. .. மிகை மதிப்பு.
Value, real .. .. .. அசல் மதிப்பு.
Variable .. .. .. மாறு ராசி.
Variable, dependent .. .. சார்புடை மாறி.
Variable, independent .. சார்பில் மாறி.
Velocity .. .. .. விசை.
Velocity, angular .. .. கோண விசை.
Velocity, initial.. .. .. தொடக்க விசை.
Vertex .. .. கோண உச்சி.
Voltaic cell .. .. .. வால்டாக் கலம்.
Volume .. .. பருமம், கொள்ளளவு, கன அளவு.

W

Width .. .. அகலம்.

Z

Zero .. .. சுன்னம்.